Name: **Datum:**

Differenzialquotient - Grundwissen

Ist eine Funktion mit dem Funktionsnamen f und dem Funktionsterm $y(x)$ gegeben und ist x_0 eine Stelle und $y(x_0) =: y_0$ der zugehörige Funktionswert, dann heißt die Zahl

$$m(x_0) := \lim_{\tilde{x}\to x_0} m(x_0;\tilde{x}) = \lim_{\tilde{x}\to x_0} \frac{y(\tilde{x}) - y_0}{\tilde{x} - x_0} = \lim_{\tilde{x}\to x_0} \frac{y(\tilde{x}) - y(x_0)}{\tilde{x} - x_0}$$, oft auch mit $\frac{dy}{dx}(x_0)$ bezeichnet,

der **Differenzialquotient** oder die **momentane Änderungsrate** oder die **Ableitung** der Funktion f **an der Stelle** x_0.

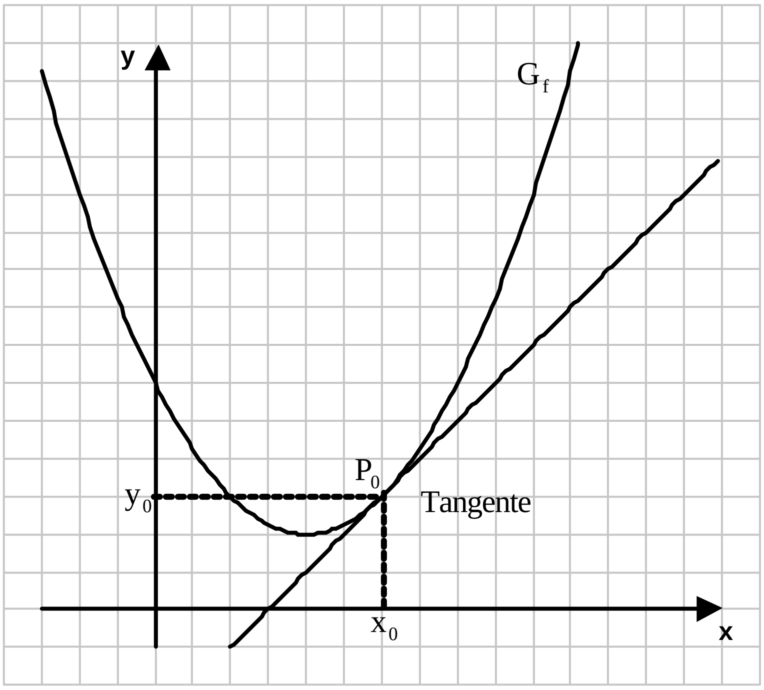
Dieser Differenzialquotient $m(x_0)$ gibt Auskunft über die momentane Veränderung der y-Werte der Funktion an der Stelle x_0. Genauer: Der Differenzialquotient gibt Auskunft darüber, um welchen Wert sich die y-Werte der Funktion beim „Voranschreiten" der x-Werte um jeweils eine Einheit ändern würden, wenn die Änderung der y-Werte beim „Voranschreiten" der x-Werte von x_0 aus ständig genau so bliebe, wie sie an der Stelle x_0 gerade ist (was i.a. aber nicht der Fall ist).

Die **Geometrische Interpretation** dieses Differenzialquotienten sieht wie folgt aus:

Ist G_f der Graph der Funktion f und ist $P_0(x_0 \mid y_0)$ ein Punkt des Graphen G_f, dann ist

$$\boxed{m(x_0) = \lim_{\tilde{x}\to x_0} \frac{y(\tilde{x}) - y_0}{\tilde{x} - x_0}}$$

die **Steigung der Tangente** an den Graphen G_f **am Punkt** P_0.



Eine Physikalische Interpretation dieses Differenzialquotienten kann z.B. diese sein:

Wird die Bewegung eines Körpers durch eine Zeit-Orts-Funktion mit dem Term $s(t)$ beschrieben und ist t_0 ein Zeitpunkt und $s(t_0) =: s_0$ der zugehörige Ort des Körpers, dann ist

$$\boxed{\lim_{\tilde{t}\to t_0} \frac{s(\tilde{t}) - s_0}{\tilde{t} - t_0} = \lim_{\tilde{t}\to t_0} \frac{s(\tilde{t}) - s(t_0)}{\tilde{t} - t_0}}$$, das in diesem Fall oft auch mit $v(t_0)$ bezeichnet wird,

die **Momentangeschwindigkeit** des Körpers **zum Zeitpunkt** t_0 bzw. **am Ort** s_0.

Beispiele: **1.** *Berechnen Sie die momentane Änderungsrate der Funktion f mit* $y(x)=\frac{1}{4}x^2$ *an der Stelle* $x_0=3$.

Lösung:

Berechnen Sie zuerst den zugehörigen Funktionswert $y_0=y(x_0)=y(3)=\frac{1}{4}\cdot 3^2=\frac{9}{4}$.

Berechnen Sie dann

$$m(3)=\lim_{\tilde{x}\to x_0}\frac{y(\tilde{x})-y_0}{\tilde{x}-x_0}=\lim_{\tilde{x}\to 3}\frac{\frac{1}{4}\tilde{x}^2-\frac{9}{4}}{\tilde{x}-3}=\lim_{\tilde{x}\to 3}\frac{\frac{1}{4}(\tilde{x}^2-9)}{\tilde{x}-3}=\lim_{\tilde{x}\to 3}\frac{\frac{1}{4}(\tilde{x}-3)(\tilde{x}+3)}{\tilde{x}-3}=\lim_{\tilde{x}\to 3}\tfrac{1}{4}(\tilde{x}+3)=1{,}5.$$

Die momentane Änderungsrate der Funktion f mit $y(x)=\frac{1}{4}x^2$ an der Stelle $x_0=3$ beträgt $1{,}5$.

2. *Berechnen Sie die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f mit* $y(x)=-\frac{1}{2}x^2$ *am Punkt* $P_0(4\,|\,...)$.

Lösung:

Berechnen Sie zuerst die y-Koordinaten $y_0=y(x_0)=y(4)=-\frac{1}{2}\cdot 4^2=-8$.

Berechnen Sie dann

$$m(4)=\lim_{\tilde{x}\to x_0}\frac{y(\tilde{x})-y_0}{\tilde{x}-x_0}=\lim_{\tilde{x}\to 4}\frac{-\frac{1}{2}\tilde{x}^2-(-8)}{\tilde{x}-4}=\lim_{\tilde{x}\to 4}\frac{-\frac{1}{2}(\tilde{x}^2-16)}{\tilde{x}-4}=\lim_{\tilde{x}\to 4}\frac{-\frac{1}{2}(\tilde{x}-4)(\tilde{x}+4)}{\tilde{x}-4}=\lim_{\tilde{x}\to 4}-\tfrac{1}{2}(\tilde{x}+4)=-4$$

Die Steigung der Tangente an den Graphen der Funktion f mit $y(x)=-\frac{1}{2}x^2$ am Punkt $P_0(4\,|\,-8)$ beträgt -4.

3. Die Bewegung eines Körpers wird durch die Zeit-Orts-Funktion mit dem Term $s(t)=-4{,}9\cdot t^2$ (t: Zeit in sec; s: Ort in m) beschrieben.
Berechnen Sie die Momentangeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt $t_0=2$.

Lösung:

Berechnen Sie zuerst den zugehörigen Ort $s_0=s(t_0)=s(2)=-4{,}9\cdot 2^2=-19{,}6$.

Berechnen Sie dann

$$v(2)=\lim_{\tilde{t}\to t_0}\frac{s(\tilde{t})-s_0}{\tilde{t}-t_0}=\lim_{\tilde{t}\to 2}\frac{-4{,}9\cdot\tilde{t}^2-(-19{,}6)}{\tilde{t}-2}=\lim_{\tilde{t}\to 2}\frac{-4{,}9\cdot(\tilde{t}^2-4)}{\tilde{t}-2}$$

$$=\lim_{\tilde{t}\to 2}\frac{-4{,}9\cdot(\tilde{t}-2)(\tilde{t}+2)}{\tilde{t}-2}=\lim_{\tilde{t}\to 2}-4{,}9\cdot(\tilde{t}+2)=-19{,}6$$

Die Momentangeschwindigkeit des Körpers zum Zeitpunkt und $t_0=2\,\mathrm{sec}$ am Ort $s_0=-19{,}6\,\mathrm{m}$ beträgt $-19{,}62\,\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{sec}}$.

