Name: **Datum:**

Differenzenquotient - Grundwissen

Ist eine Funktion mit dem Funktionsnamen f und dem Funktionsterm $y(x)$ gegeben und sind x_1 und x_2 zwei Stellen und $y(x_1) =: y_1$ bzw. $y(x_2) =: y_2$ die zugehörigen Funktionswerte, dann heißt die Zahl

$\boxed{m(x_1;x_2) := \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1} = \frac{y(x_2) - y(x_1)}{x_2 - x_1}}$, die man oft auch mit $\frac{\Delta y}{\Delta x}(x_1;x_2)$ bezeichnet

der <u>**Differenzenquotient**</u> oder die <u>**durchschnittliche Änderungsrate**</u> der Funktion f <u>**zwischen den Stellen**</u> x_1 und x_2.

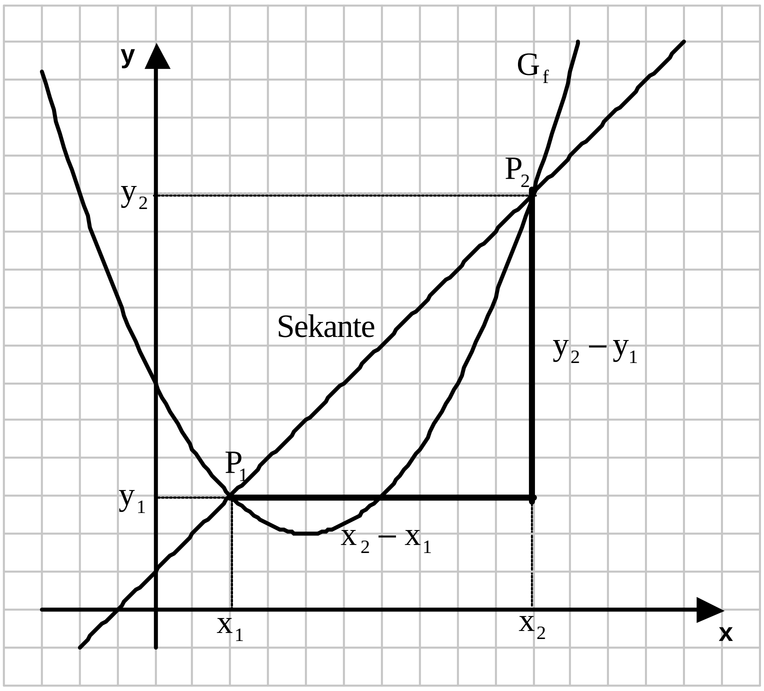
Dieser Differenzenquotient $m(x_1;x_2)$ *gibt Auskunft über die durchschnittliche Veränderung der y-Werte der Funktion beim „Voranschreiten" der x-Werte von* x_1 *nach* x_2*. Genauer: Der Differenzenquotient gibt Auskunft darüber, um welchen Wert sich die y-Werte der Funktion beim „Voranschreiten" der x-Werte um jeweils eine Einheit ändern <u>würden</u>, wenn die Änderung der y-Werte beim „Voranschreiten" der x-Werte von* x_1 *nach* x_2 *ständig gleichmäßig <u>wäre</u> (was i.a. aber nicht der Fall ist).*

Die **Geometrische Interpretation** dieses Differenzenquotienten sieht wie folgt aus:

Ist G_f der Graph der Funktion f und sind $P_1(x_1 | y_1)$ und $P_2(x_2 | y_2)$ zwei Punkte des Graphen G_f, dann ist

$$\boxed{m(x_1;x_2) = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}}$$

die <u>**Steigung der Sekante**</u> <u>**durch die Punkte**</u> P_1 und P_2 des Graphen G_f.



Eine Physikalische Interpretation dieses Differenzenquotienten kann z.B. diese sein:

Wird die Bewegung eines Körpers durch eine Zeit-Orts-Funktion mit dem Term $s(t)$ beschrieben und sind t_1 und t_2 zwei Zeitpunkte und $s(t_1) =: s_1$ bzw. $s(t_2) =: s_2$ die zugehörigen Orte, dann ist

$\boxed{\frac{s_2 - s_1}{t_2 - t_1} = \frac{s(t_2) - s(t_1)}{t_2 - t_1}}$, das in diesem Fall oft auch mit $\overline{v}(t_1;t_2)$ bezeichnet wird,

die <u>**Durchschnittsgeschwindigkeit**</u> des Körpers <u>**zwischen den Zeitpunkten**</u> t_1 und t_2 bzw. <u>**zwischen den Orten**</u> s_1 und s_2.

Beispiele: **1.** *Berechnen Sie die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion f mit* $y(x)=\frac{1}{4}x^2$ *zwischen den Stellen* $x_1=2$ *und* $x_2=4$.

Lösung:

Berechnen Sie zuerst die zugehörigen Funktionswerte $y_1=y(x_1)=y(2)=\frac{1}{4}\cdot 2^2=1$ und $y_2=y(x_2)=y(4)=\frac{1}{4}\cdot 4^2=4$.

Berechnen Sie dann $m(2;4)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{4-1}{4-2}=\frac{3}{2}=1{,}5$.

Die durchschnittliche Änderungsrate der Funktion f mit $y(x)=\frac{1}{4}x^2$ zwischen den Stellen $x_1=2$ und $x_2=4$ beträgt $1{,}5$.

2. *Berechnen Sie die Steigung der Sekante durch die Punkte* $P_1(1\,|\,...)$ *und* $P_2(5\,|\,...)$ *des Graphen der Funktion f mit* $y(x)=-\frac{1}{2}x^2$.

Lösung:

Berechnen Sie zuerst die zugehörigen y-Koordinaten $y_1=y(x_1)=y(1)=-\frac{1}{2}\cdot 1^2=-0{,}5$ und $y_2=y(x_2)=y(5)=-\frac{1}{2}\cdot 5^2=-12{,}5$.

Berechnen Sie dann $m(1;5)=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}=\frac{-12{,}5-(-0{,}5)}{5-1}=\frac{-12}{4}=-3$.

Die Steigung der Sekante durch die Punkte $P_1(1\,|\,-0{,}5)$ und $P_2(5\,|\,-12{,}5)$ des Graphen der Funktion f mit $y(x)=-\frac{1}{2}x^2$ beträgt -3.

3. Die Bewegung eines Körpers wird durch die Zeit-Orts-Funktion mit dem Term $s(t)=-4{,}9\cdot t^2$ (t: Zeit in sec; s: Ort in m) beschrieben.
Berechnen Sie die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers zwischen den Zeitpunkten $t_1=0$ *und* $t_2=3$.

Lösung:

Berechnen Sie zuerst die zugehörigen Orte $s_1=s(t_1)=s(0)=-4{,}9\cdot 0^2=0$ und $s_2=s(t_2)=s(3)=-4{,}9\cdot 3^2=-44{,}1$.

Berechnen Sie dann $\overline{v}(0;3)=\frac{s_2-s_1}{t_2-t_1}=\frac{-44{,}1-0}{3-0}=\frac{-44{,}1}{3}=-14{,}7$.

Die Durchschnittsgeschwindigkeit des Körpers zwischen den Zeitpunkten und $t_1=0\,\text{sec}$ und $t_2=3\,\text{sec}$ bzw. den Orten $s_1=0\,\text{m}$ und $s_2=-44{,}1\,\text{m}$ beträgt $-14{,}7\,\frac{\text{m}}{\text{sec}}$.

