

Relative Tiefpunkte - Definition und Eigenschaften



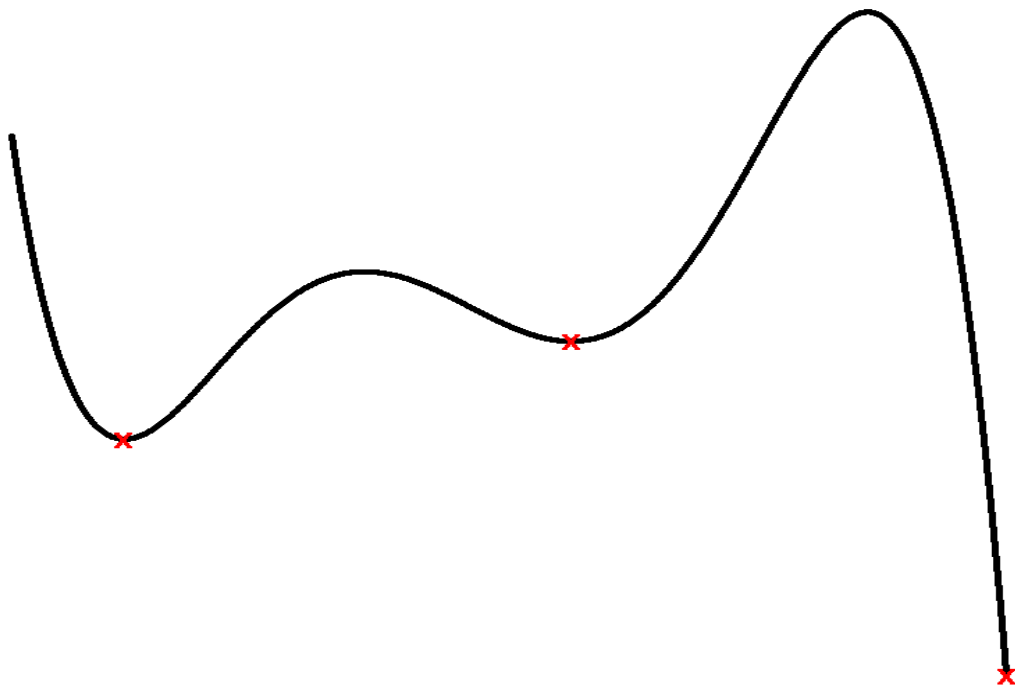
Was versteht man unter einem **relativen (oder lokalen) Tiefpunkt einer Funktion bzw. eines Funktionsgraphen?**

Gegeben sei eine Funktion f durch den Funktionsterm $f(x)$ und die Definitionsmenge D_f , ihr Graph sei G_f .

Ein Punkt $T(x_T | y_T)$ heißt **relativer (oder lokaler) Tiefpunkt der Funktion f bzw. des Graphen G_f** , wenn es eine Umgebung des Punktes T gibt, so dass der y -Wert y_T des Punktes T kleiner ist als die y -Werte aller anderen Punkte in der Umgebung von T , kurz

$T(x_T | y_T)$ ist relativer Tiefpunkt von $f \Leftrightarrow$ es gibt eine Umgebung $U(x_T)$ mit:
für alle $x \in U(x_T)$ gilt: $f(x_T) < f(x)$

Man bezeichnet den y -Wert y_T eines relativen Tiefpunktes als **relatives (oder lokales) Minimum der Funktion f** und den x -Wert x_T als **Stelle des relativen (oder lokalen) Minimums der Funktion f** .





Welche Eigenschaften haben relative (oder lokale) Tiefpunkte, die im Innern (d.h. nicht am Rand) des Definitionsbereichs einer Funktion liegen?

Gegeben sei eine Funktion f durch den Funktionsterm $f(x)$ und die Definitionsmenge D_f , ihr Graph sei G_f und der Punkt $T(x_T | y_T)$ sei ein relativer Hochpunkt der Funktion f , der nicht am Rand des Definitionsbereichs liegt.

Dann gilt für den Punkt $T(x_T | y_T)$ bzw. dessen x -Wert x_T :

- Im Punkt T hat der Graph G_f eine horizontale Tangente, d.h. die Momentansteigung / 1.Ableitung der Funktion f an der Stelle x_T hat den Wert 0, kurz

$$f'(x_T) = 0$$

- In einer Umgebung „links“ vom Punkt T fällt der Graph G_f , in einer Umgebung „rechts“ vom Punkt T steigt der Graph G_f , d.h. die Momentansteigung / 1.Ableitung der Funktion f ist für Stellen $x < x_T$ negativ und für Stellen $x_T < x$ positiv, kurz

$$\begin{array}{l} \text{für } x \in U(x_T) \text{ und } x < x_T \text{ gilt : } f'(x) < 0, \\ \text{für } x \in U(x_T) \text{ und } x_T < x \text{ gilt : } f'(x) > 0 \end{array}$$

- In einer Umgebung vom Punkt T ist der Graph G_f linksgekrümmt, d.h. die Krümmung / 2.Ableitung der Funktion f in einer Umgebung der Stelle x_T (evtl. mit Ausnahme der Stelle x_T selbst, siehe Bemerkung unten) ist positiv, kurz

$$\text{für } x \in U(x_T) \text{ gilt : } f''(x) \geq 0$$

Bemerkung: In einzelnen Sonderfällen kann es vorkommen, dass der Graph G_f im Punkt T selbst gerade verläuft, d.h. dass die Krümmung / 2.Ableitung der Funktion f an der Stelle x_T selbst den Wert 0 hat.