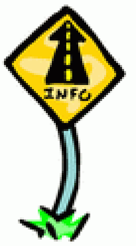
Name: **Datum:**

Relative Tiefpunkte im Innern des Definitionsbereichs - Bestimmen von relativen Tiefpunkten



Wie bestimmt man mit Sicherheit die relativen Tiefpunkte im Innern des Definitionsbereichs einer Funktion?

Gegeben sei eine Funktion f durch den Funktionsterm $f(x)$ und die Definitionsmenge D_f, ihr Graph sei G_f.

Dann gelten die folgenden zwei sogenannten **<u>hinreichenden Bedingungen für einen relativen Tiefpunkt</u>**:

- Wenn der Graph G_f in einem Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ horizontal verläuft <u>und</u> der Graph in einer Umgebung des Punktes P links von P fällt und rechts von P steigt, kurz

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ und } \left\{ \begin{array}{c} \text{es gibt eine Umgebung } U(x_0) \text{ mit:} \\ \text{für } x \in U(x_0) \text{ und } x < x_0 \text{ gilt } f'(x) < 0 \text{ und} \\ \text{für } x \in U(x_0) \text{ und } x_0 < x \text{ gilt } f'(x) > 0 \end{array} \right\}},$$

  dann ist der Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ mit Sicherheit ein relativer Tiefpunkt.

- Wenn der Graph G_f in einem Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ horizontal verläuft <u>und</u> der Graph in dem Punkt P linksgekrümmt ist, kurz

$$\boxed{f'(x_0) = 0 \text{ und } f''(x_0) > 0},$$

  dann ist der Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ mit Sicherheit ein relativer Tiefpunkt.

Man beachte: Üblicherweise erfolgt die Bestimmung von relativen Tiefpunkten mit der zweiten hinreichenden Bedingung $f'(x_0) = 0$ und $f''(x_0) > 0$. Es gibt allerdings relative Tiefpunkte, bei denen $f''(x_0) = 0$ gilt. In diesen Fällen muss bei der Bestimmung von relativen Tiefpunkten auf die erstgenannte hinreichende Bedingung zurückgegriffen werden.

Mit Hilfe der beiden hinreichenden Bedingungen geht man bei der Suche nach relativen Tiefpunkten einer Funktion f im Innern ihres Definitionsbereichs D_f nun üblicherweise folgendermaßen vor:

1. **a)** *Bestimme den Term* $f'(x)$ *der 1. Ableitung der Funktion f.*

   b) *Setze den Term* $f'(x)$ *gleich 0*; Du erhältst die Gleichung $f'(x) = 0$.

   c) *Bestimme die Lösungsmenge* $L = \{...\}$ *dieser Gleichung*; alle Lösungen dieser Gleichung sind sogenannte „Kandidatenstellen", d.h. die x-Werte von möglichen relativen Tiefpunkten.

2. **a)** *Bestimme den Term* $f''(x)$ *der 2. Ableitung der Funktion f.*

   b) *Setze jede der unter* **1. c)** *gewonnenen „Kandidatenstellen"* x_0 *in den Term* $f''(x)$ *ein und berechne den Termwert* $f''(x_0)$.

   Ist der berechnete Termwert <u>positiv</u> ($f''(x_0) > 0$), so „hat der Kandidat die Prüfung bestanden", d.h. es befindet sich an der „Kandidatenstelle" mit Sicherheit ein relativer Tiefpunkt.

   Ist der berechnete Termwert dagegen <u>gleich 0</u> ($f''(x_0) = 0$), *so setze zwei x-Werte, die etwas kleiner bzw. etwas größer als die „Kandidatenstelle" sind (z.B.* $x_0 - 1$ *und* $x_0 + 1$*), in den Term* $f'(x)$ *der 1. Ableitung ein und berechne die Termwerte* $f'(x_0 - 1)$ *und* $f'(x_0 + 1)$; wenn nun $f'(x_0 - 1) < 0$ und $f'(x_0 + 1) > 0$ sind, so „hat der Kandidat jetzt die Prüfung bestanden", d.h. es befindet sich an der „Kandidatenstelle" mit Sicherheit ein relativer Tiefpunkt.

3. *Setze jede der „Kandidatenstellen, die die Prüfung bestanden haben", in den Term* $f(x)$ *ein und berechne den Termwert* $f(x_0)$; der so berechnete Termwert ist der y-Wert y_0 des entsprechenden relativen Tiefpunktes T, der dann die Koordinaten $T(x_0 \mid y_0)$ hat.