

Sattelpunkte - Definition und Eigenschaften



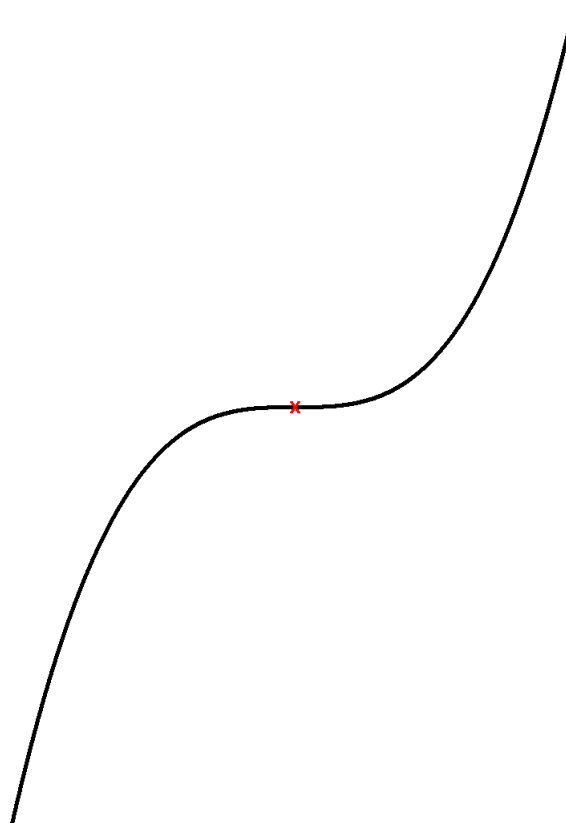
Was versteht man unter einem Sattelpunkt einer Funktion bzw. eines Funktionsgraphen?

Gegeben sei eine Funktion f durch den Funktionsterm $f(x)$ und die Definitionsmenge D_f , ihr Graph sei G_f .

Ein Punkt $S(x_S | y_S)$ heißt **Sattelpunkt der Funktion f bzw. des Graphen G_f** , wenn der Graph im Punkt S einen Wendepunkt und gleichzeitig eine horizontale Tangente besitzt:

$S(x_S | y_S)$ ist Sattelpunkt von $f \Leftrightarrow$

S ist Wendepunkt von G_f und $f'(x_S) = 0$ (G_f hat in S eine horizontale Tangente)





Welche Eigenschaften haben Sattelpunkte einer Funktion?

Gegeben sei eine Funktion f durch den Funktionsterm $f(x)$ und die Definitionsmenge D_f , ihr Graph sei G_f und der Punkt $S(x_S | y_S)$ sei ein Sattelpunkt der Funktion f .

Dann gilt für den Punkt $S(x_S | y_S)$ bzw. dessen x -Wert x_S :

- Im Punkt S hat der Graph G_f eine horizontale Tangente, d.h. die Momentansteigung / 1.Ableitung der Funktion f an der Stelle x_S hat den Wert 0:

$$S(x_S | y_S) \text{ ist Sattelpunkt von } f \Rightarrow f'(x_S) = 0 \text{ (} G_f \text{ verläuft im Punkt } S \text{ horizontal)}$$

- Im Punkt S verläuft der Graph G_f gerade, d.h. der Graph ist nicht gekrümmt, d.h. die Momentankrümmung / 2.Ableitung der Funktion f an der Stelle x_S hat den Wert 0:

$$S(x_S | y_S) \text{ ist Sattelpunkt von } f \Rightarrow f''(x_S) = 0 \text{ (} G_f \text{ ist im Punkt } S \text{ gerade)}$$

- Es gibt eine Umgebung des Punktes S , so dass die Steigung des Graphen G_f im Punkt S größer oder kleiner ist als die Steigung aller anderen Punkte in der Umgebung von S :

$$\begin{aligned} S(x_S | y_S) \text{ ist Sattelpunkt von } f &\Leftrightarrow \text{ es gibt eine Umgebung } U(x_S) \text{ mit :} \\ &\text{für alle } x \in U(x_S) \text{ gilt : } f'(x) < f'(x_S) \text{ (} S \text{ hat die größte Steigung)} \\ &\text{oder} \\ &\text{für alle } x \in U(x_S) \text{ gilt : } f'(x_S) < f'(x) \text{ (} S \text{ hat die kleinste Steigung)} \end{aligned}$$

- Es gibt eine Umgebung des Punktes S , so dass die 3.Ableitung der Funktion f in dieser Umgebung (evtl. mit Ausnahme der Stelle x_S selbst, siehe Bemerkung unten) nicht den Wert 0 hat:

$$\begin{aligned} S(x_S | y_S) \text{ ist Sattelpunkt von } f &\Rightarrow \text{ es gibt eine Umgebung } U(x_S) \text{ mit :} \\ &\text{für alle } x \in U(x_S) \setminus x_S \text{ gilt : } f'''(x) \neq 0 \end{aligned}$$

Bemerkung: In einzelnen Sonderfällen kann es vorkommen, dass die 3.Ableitung der Funktion f an der Stelle x_S selbst den Wert 0 hat.