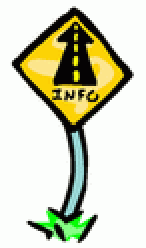
Name: **Datum:**

Wendepunkte - Definition und Eigenschaften



Was versteht man unter einem Wendepunkt einer Funktion bzw. eines Funktionsgraphen?

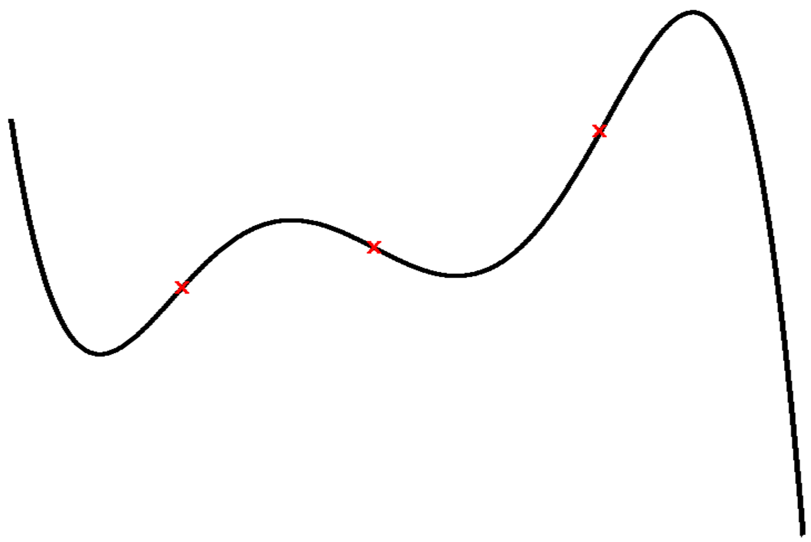
Gegeben sei eine Funktion f durch den Funktionsterm $f(x)$ und die Definitionsmenge D_f, ihr Graph sei G_f.

Ein Punkt $W(x_W \mid y_W)$ heißt **<u>Wendepunkt der Funktion</u>** f **<u>bzw. des Graphen</u>** G_f, wenn es eine Umgebung des Punktes W gibt, in der der Graph G_f „rechts" und „links" von W unterschiedliches Krümmungsverhalten hat:

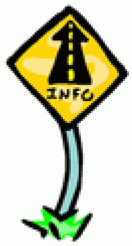
$W(x_W \mid y_W)$ ist Wendepunkt von f $\Leftrightarrow$ es gibt eine Umgebung $U(x_W)$ mit:
für alle $x \in U(x_W)$ und $x < x_W$ gilt: $f''(x) > 0$ $\left(G_f\right.$ links von W linksgekrümmt$\left.\right)$ und
für alle $x \in U(x_W)$ und $x_W < x$ gilt: $f''(x) < 0$ $\left(G_f\right.$ rechts von W rechtsgekrümmt$\left.\right)$
oder
für alle $x \in U(x_W)$ und $x < x_W$ gilt: $f''(x) < 0$ $\left(G_f\right.$ links von W rechtsgekrümmt$\left.\right)$ und
für alle $x \in U(x_W)$ und $x_W < x$ gilt: $f''(x) > 0$ $\left(G_f\right.$ rechts von W linksgekrümmt$\left.\right)$

Per Definition können Wendepunkte nur im Innern des Definitionsbereichs einer Funktion liegen.

Man bezeichnet den x-Wert x_W eines Wendepunktes $W(x_W \mid y_W)$ auch als **<u>Wendestelle der Funktion</u>** f.



Weiter bezeichnet man eine Tangente an den Graphen G_f in einem Wendepunkt W oft auch als **<u>Wendetangente</u>**.



Welche Eigenschaften haben Wendepunkte einer Funktion?

Gegeben sei eine Funktion f durch den Funktionsterm $f(x)$ und die Definitionsmenge D_f, ihr Graph sei G_f und der Punkt $W(x_W \mid y_W)$ sei ein Wendepunkt der Funktion f.

Dann gilt für den Punkt $W(x_W \mid y_W)$ bzw. dessen x-Wert x_W:

- Im Punkt W verläuft der Graph G_f gerade, d.h. der Graph ist nicht gekrümmt, d.h. die Momentankrümmung / 2.Ableitung der Funktion f an der Stelle x_W hat den Wert 0:

$$\boxed{W(x_W \mid y_W) \text{ ist Wendepunkt von } f \Rightarrow f''(x_W) = 0 \; (G_f \text{ ist im Punkt W gerade})}$$

- Es gibt eine Umgebung des Punktes W, so dass die Steigung des Graphen G_f im Punkt W größer oder kleiner ist als die Steigung aller anderen Punkte in der Umgebung von W:

$$\boxed{\begin{array}{l} W(x_W \mid y_W) \text{ ist Wendepunkt von } f \Leftrightarrow \text{ es gibt eine Umgebung } U(x_W) \text{ mit:} \\ \text{für alle } x \in U(x_W) \text{ gilt: } f'(x) < f'(x_W) \; \left(\text{W hat die größte Steigung}\right) \\ \text{oder} \\ \text{für alle } x \in U(x_W) \text{ gilt: } f'(x_W) < f'(x) \left(\text{W hat die kleinste Steigung}\right) \end{array}}$$

- Es gibt eine Umgebung des Punktes W, so dass die 3.Ableitung der Funktion f in dieser Umgebung (evtl. mit Ausnahme der Stelle x_W selbst, siehe Bemerkung unten) <u>nicht den Wert 0</u> hat:

$$\boxed{\begin{array}{l} W(x_W \mid y_W) \text{ ist Wendepunkt von } f \Rightarrow \text{ es gibt eine Umgebung } U(x_W) \text{ mit:} \\ \text{für alle } x \in U(x_W) \setminus x_W \text{ gilt: } f'''(x) \neq 0 \end{array}}$$

Bemerkung: In einzelnen Sonderfällen kann es vorkommen, dass die 3.Ableitung der Funktion f an der Stelle x_W selbst den Wert 0 hat.