Name: **Datum:**

Wendepunkte - Bestimmen von Wendepunkten

Wie bestimmt man mit Sicherheit die Wendepunkte einer Funktion?

Gegeben sei eine Funktion f durch den Funktionsterm $f(x)$ und die Definitionsmenge D_f, ihr Graph sei G_f.

Dann gelten die folgenden zwei sogenannten **<u>hinreichenden Bedingungen für einen Wendepunkt</u>**:

- Wenn der Graph G_f in einem Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ gerade verläuft <u>und</u> der Graph in einer Umgebung des Punktes P „rechts“ und „links“ von P verschiedenes Krümmungsverhalten hat, kurz

$$\boxed{f''(x_0) = 0 \text{ und } \begin{cases} \text{es gibt eine Umgebung } U(x_0) \text{ mit:} \\ \text{für } x \in U(x_0) \text{ und } x < x_0 \text{ gilt: } f''(x) > 0 \text{ und} \\ \quad \text{für } x \in U(x_0) \text{ und } x_0 < x \text{ gilt: } f''(x) < 0 \\ \text{oder} \\ \text{für } x \in U(x_0) \text{ und } x < x_0 \text{ gilt } f''(x) < 0 \text{ und} \\ \quad \text{für } x \in U(x_0) \text{ und } x_0 < x \text{ gilt } f''(x) > 0 \end{cases}},$$

  dann ist der Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ mit Sicherheit ein Wendepunkt.

- Wenn der Graph G_f in einem Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ gerade verläuft <u>und</u> die 3. Ableitung der Funktion f an der Stelle x_0 <u>nicht</u> den Wert 0 hat, kurz

$$\boxed{f''(x_0) = 0 \text{ und } f'''(x_0) \neq 0},$$

  dann ist der Punkt $P(x_0 \mid y_0)$ mit Sicherheit ein Wendepunkt.

Man beachte: Üblicherweise erfolgt die Bestimmung von Wendepunkten mit der zweiten hinreichenden Bedingung $f''(x_0) = 0$ und $f'''(x_0) \neq 0$. Es gibt allerdings Wendepunkte, bei denen $f'''(x_0) = 0$ gilt. In diesen Fällen muss bei der Bestimmung von Wendepunkten auf die erstgenannte hinreichende Bedingung zurückgegriffen werden.

Mit Hilfe der beiden hinreichenden Bedingungen geht man bei der Suche nach Wendepunkten einer Funktion f im Innern ihres Definitionsbereichs D_f nun üblicherweise folgendermaßen vor:

1. a) *Bestimme den Term* $f''(x)$ *der 2. Ableitung der Funktion f.*

b) *Setze den Term* $f''(x)$ *gleich 0*; Du erhältst die Gleichung $f''(x) = 0$.

c) *Bestimme die Lösungsmenge* $L = \{...\}$ *dieser Gleichung*; alle Lösung(en) dieser Gleichung sind sogenannte „Kandidatenstellen“, d.h. die x-Werte von möglichen Wendepunkten.

2. a) *Bestimme den Term* $f'''(x)$ *der 3. Ableitung der Funktion f.*

b) *Setze jede der unter* **1. c)** *gewonnenen „Kandidatenstellen“* x_0 *in den Term* $f'''(x)$ *ein und berechne den Termwert* $f'''(x_0)$.

Ist der berechnete Termwert <u>nicht gleich 0</u> ($f'''(x_0) \neq 0$), so „hat der Kandidat die Prüfung bestanden“, d.h. es befindet sich an der „Kandidatenstelle“ mit Sicherheit ein Wendepunkt.

Ist der berechnete Termwert dagegen <u>gleich 0</u> ($f'''(x_0) = 0$), *so setze zwei x-Werte, die etwas kleiner bzw. etwas größer als die „Kandidatenstelle“ sind (z.B.* $x_0 - 1$ *und* $x_0 + 1$*), in den Term* $f''(x)$ *der 2. Ableitung ein und berechne die Termwerte* $f''(x_0 - 1)$ *und* $f''(x_0 + 1)$; haben die zwei Termwerte unterschiedliche Vorzeichen, so „hat der Kandidat jetzt die Prüfung bestanden“, d.h. es befindet sich an der „Kandidatenstelle“ mit Sicherheit ein Wendepunkt.

3. *Setze jede der „Kandidatenstellen, die die Prüfung bestanden haben“, in den Term* $f(x)$ *ein und berechne den Termwert* $f(x_0)$; der so berechnete Termwert ist der y-Wert y_0 des entsprechenden Wendepunktes W, der dann die Koordinaten $W(x_0 \mid y_0)$ hat.