BAYERN Abitur 1990 Mathematik Grundkurs

Infinitesimalrechnung I

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto 1 - \frac{2}{x} + \frac{1}{x^2}$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Der Graph von f wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Berechnen Sie die Nullstelle der Funktion f, und stellen Sie die Gleichungen aller Asymptoten auf.
   Bestimmen Sie das Verhalten von f in der Umgebung von $x = 0$. (5 BE)

   (b) Ermitteln Sie das Monotonieverhalten von f, und geben Sie Art und Lage des Extrempunktes von G_f an.
   [Teilergebnis: $f'(x) = \frac{2x-2}{x^3}$] (6 BE)

   (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f, und bestimmen Sie die Koordinaten des Wendepunktes. (6 BE)

   (d) Berechnen Sie die Werte von f an den Stellen -5, -2, -1, $\frac{1}{4}$, 3 und 7.
   Skizzieren Sie G_f unter Berücksichtigung der bisherigen Ergebnisse im Bereich $-7 \leq x \leq 7$ (Längeneinheit 1 cm).
   Tragen Sie auch die Asymptoten in das Koordinatensystem ein. (6 BE)

2. Wir betrachten jetzt für $a \neq 0$ zusätzlich die Schar von Funktionen

$$g_a : x \mapsto \frac{a}{x^2}, \quad \mathbb{D}_{g_a} = \mathbb{R} \setminus \{0\}.$$

   (a) Untersuchen Sie, für welche Werte von a die Graphen von f und g_a keinen Schnittpunkt, genau einen Schnittpunkt, genau zwei Schnittpunkte haben. Geben Sie die Abszissen der möglichen Schnittpunkte an. (Beachten Sie die Definitionsmenge der Funktionen.) (7 BE)
   In den folgenden Teilaufgaben sei $a = 4$.

   (b) Berechnen Sie $g_4(1)$, $g_4(2)$, $g_4(4)$, und skizzieren Sie den Graphen von g_4 unter Verwendung der Ergebnisse von Teilaufgabe 2a in das Koordinatensystem von Teilaufgabe 1d. (4 BE)

   (c) Berechnen Sie den Inhalt J des Flächenstücks, das zwischen den Graphen von f und g_4 im Bereich $1 \leq x \leq 3$ liegt. (6 BE)

Infinitesimalrechnung II

Gegeben ist die Funktion

$$f : x \mapsto x \cdot \mathrm{e}^{1-x}$$

mit $\mathbb{D}_f = \mathbb{R}$; ihr Graph wird mit G_f bezeichnet.

1. (a) Zeigen Sie, dass $O(0|0)$ der einzige Achsenschnittpunkt von G_f ist. Bestimmen Sie das Verhalten von f für $x \to -\infty$ und für $x \to +\infty$. (Hinweis: $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{x}{\mathrm{e}^x} = 0$ kann ohne Beweis verwendet werden.) (5 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass für die 1. Ableitung von f gilt: $f'(x) = (1-x) \cdot \mathrm{e}^{1-x}$. Geben Sie das Monotonieverhalten von f sowie Art und Lage des Extrempunktes von G_f an. (5 BE)

   (c) Untersuchen Sie das Krümmungsverhalten von G_f; ermitteln Sie die Lage des Wendepunktes und eine Gleichung der Wendetangente von G_f. Zeigen Sie, dass die Wendetangente durch den Punkt $(4|0)$ geht. (10 BE)

   (d) Berechnen Sie die Funktionswerte (auf Zehntel gerundet) an den Stellen -1, $-\frac{1}{2}$, $\frac{1}{2}$ und 4. Zeichnen Sie nun die Wendetangente und G_f im Bereich $[-1; 4]$ unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse (Hochformat, Ursprung im oberen Drittel, Längeneinheit 2 cm). (7 BE)

2. Für eine Funktion F besteht die Beziehung $F(x) = -\mathrm{e}^{1-x} - f(x)$; $\mathbb{D}_F = \mathbb{R}$.

   (a) Bestätigen Sie durch Rechnung, dass F eine Stammfunktion von f ist. (4 BE)

   (b) Bestimmen Sie für $k \in \mathbb{R}$ eine integralfreie Darstellung von

   $$J(k) = \int_{-1}^{k} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

   Zeigen Sie, dass $\lim\limits_{k\to\infty} J(k) = 0$ ist. Was bedeutet dies für die zwei zwischen G_f und der x-Achse im Bereich $[-1; \infty[$ gelegenen Flächenstücke? (9 BE)

Analytische Geometrie I

In einem kartesischen Koordinatensystem sind gegeben: die Ebene

$$E : \vec{x} = \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ -2 \end{pmatrix}$$

mit $\lambda \in \mathbb{R}$ und $\mu \in \mathbb{R}$, die Gerade g durch den Punkt $A(7|-13|-4)$ mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 3 \\ -8 \\ -5 \end{pmatrix}$ und der Punkt $P(13|-9|0)$.

1. (a) Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene E in Normalenform.
   [Mögliches Ergebnis: $E : 2x_1 - 2x_2 - x_3 + 10 = 0$] (5 BE)

   (b) Berechnen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes S der Geraden g und der Ebene E.
   [Ergebnis: $S(1|3|6)$] (4 BE)

   (c) Berechnen Sie die Entfernung der Punkte A und S sowie den Abstand des Punktes A von der Ebene E. Bestimmen Sie damit den Winkel φ (auf ganze Grad gerundet), den die Gerade g mit der Ebene E bildet. Erläutern Sie Ihr Vorgehen anhand einer Skizze. (10 BE)

2. (a) Zeigen Sie, dass $F(-5|-1|2)$ der Fusspunkt des Lots vom Punkt A auf die Ebene E ist. (5 BE)

   (b) Zeigen Sie, dass die Gerade g die Strecke $[FP]$ in einem Punkt T trifft, und berechnen Sie die Koordinaten von T.
   [Teilergebnis: $T(4|-5|1)$] (9 BE)

   (c) Weisen Sie nach, dass der Punkt T der Mittelpunkt der Strecke $[AS]$ und zugleich der Mittelpunkt der Strecke $[FP]$ ist. Tragen Sie die Punkte T und P in die Skizze von Teilaufgabe 1c ein. Was folgt nun insgesamt für das Viereck $FAPS$? Begründung! (7 BE)

Analytische Geometrie II

In einem kartesischen Koordinatensystem sind die Punkte $A(0|2|-1)$, $B(-3|2|2)$ und $C(-3|5|-1)$ gegeben.

1. (a) Zeigen Sie, dass die Punkte A, B und C nicht auf einer Geraden liegen. (4 BE)

   (b) Berechnen Sie die Seitenlängen $\overline{AB}$ und $\overline{AC}$ sowie den Innenwinkel $\angle BAC$ des Dreiecks ABC. Welche besondere Eigenschaft hat also das Dreieck? (6 BE)

   (c) Geben Sie eine Gleichung der Ebene E, in der das Dreieck ABC liegt, in Normalenform an.
   [Mögliches Ergebnis: $E: x_1 + x_2 + x_3 - 1 = 0$] (5 BE)

2. Der Punkt $T(-1,5|2|0,5)$ liegt auf der Geraden AB (Nachweis nicht erforderlich).

   (a) In welchem Verhältnis teilt der Punkt T die Strecke $[AB]$? (3 BE)

   (b) Die Ebene F ist Lotebene zur Ebene E und enthält die Punkte T und C. Fertigen Sie eine Skizze an, in der die gegenseitige Lage der Punkte A, B, C und T sowie der Ebene F erkennbar ist. Ermitteln Sie eine Gleichung der Ebene F in Normalenform.
   [Mögliches Ergebnis: $F: x_1 - x_3 + 2 = 0$] (10 BE)

3. (a) Die Gerade g mit dem Richtungsvektor $\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ enthält den Punkt B und schneidet die Ebene F im Punkt D. Bestimmen Sie die Koordinaten des Punktes D.
   [Ergebnis: $D(0|5|2)$] (4 BE)

   (b) Die Punkte A, B, C und D bilden ein regelmäßiges Tetraeder (Nachweis nicht erforderlich). Tragen Sie D in die Skizze der Teilaufgabe 2b ein. Berechnen Sie den Abstand des Punktes D von der Ebene E. (3 BE)

   (c) Ermitteln Sie unter Verwendung der bisherigen Ergebnisse den Flächeninhalt J des Dreiecks ABC und den Rauminhalt V des Tetraeders $ABCD$. (5 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung I

Bei einem Spiel mit einem Tetraeder, dessen Seitenflächen mit den Augenzahlen 1, 2, 3 und 4 gekennzeichnet sind, gilt die Zahl als geworfen, die auf der untenliegenden Seite steht. Bei diesem Spielgerät ist die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der Augenzahl 3 jeweil doppelt so groß wie die (Einzel-)Wahrscheinlichkeit für das Auftreten einer der drei anderen Augenzahlen 1, 2 oder 4.

1. Geben Sie die Wahrscheinlichkeit für das Auftreten der verschiedenen Augenzahlen an. (4 BE)

   Dieses Tetraeder wird nun jeweils zweimal hintereinander geworfen. Die Augenzahlen werden in der Reihenfolge ihres Auftretens notiert.

2. (a) Geben Sie dafür einen geeigneten Ergebnisraum an, und bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeiten der Elementarereignisse. (9 BE)

   (b) Wie viele Doppelwürfe muss man mindestens ausführen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 90% wenigstens eine „Doppel-Drei“ zu erhalten? (6 BE)

   Im Folgenden betrachtet man als Ergebnis eines Doppelwurfs die Augensumme der beiden Einzelwürfe.

3. (a) Zeigen Sie, dass bei einem Doppelwurf des Tetraeders das Ereignis $E =$ „Augensumme 6 oder Augensumme 7“ mit der Wahrscheinlichkeit 40% auftritt. (5 BE)

   (b) Ein Spieler ist der Meinung, dass das Ereignis E (vgl. Teilaufgabe 3.(a)) bei 100 Doppelwürfen mindestens 40mal eintritt. Mit welcher Wahrscheinlichkeit hat er recht? (4 BE)

4. Das bisher verwendete Tetraeder (altes Tetraeder) wurde möglicherweise mit einem anderen, gleichaussehenden (neues Tetraeder) vertauscht. Mit Hilfe des folgenden Tests soll entschieden werden, ob noch das alte Tetraeder verwendet wird: Wenn bei 100 Doppelwürfen das Ereignis $E =$ „Augensumme 6 oder 7“ mindestens 35mal und höchstens 50mal auftritt, wird angenommen, dass das alte Tetraeder noch verwendet wird, sonst nicht.

   (a) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird aufgrund dieses Testverfahrens das alte Tetraeder für das neue gehalten? (7 BE)

   (b) Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird bei diesem Testverfahren ein neues Tetraeder, bei dem das Ereignis E mit der Wahrscheinlichkeit $0,25$ auftritt, für das alte Tetraeder gehalten? (5 BE)

Wahrscheinlichkeitsrechnung II

Anja, Beate, Christoph und Dieter besuchen ein Volksfest. Sie versuchen ihr Glück zunächst an der Schießbude.

1. Anja und Beate schießen (unabhängig voneinander) jeweils einmal. Anja trifft mit einer Wahrscheinlichkeit von 40%, Beate mit einer Wahrscheinlichkeit von von 70%. Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeiten dafür, das von den beiden Mädchen

   (a) keine trifft, (3 BE)

   (b) genau eine trifft. (4 BE)

2. (a) Christoph hat eine Treffsicherheit von 60%. Wie oft muss Christoph mindestens schießen, um mit einer Wahrscheinlichkeit von mehr als 99% wenigstens einmal zu treffen? (6 BE)

   (b) Dieter schießt dreimal. Seine Treffsicherheit beim 1. Schuß beträgt 50%. Nach jedem Treffer steigt seine Treffsicherheit um $\frac{1}{5}$ des vorhergehenden (!) Wertes der Treffsicherheit. Ein Fehlschuß ändert die erreichte Treffsicherheit nicht. Berechnen Sie (z. B. mit Hilfe eines Baumdiagramms) die Wahrscheinlichkeit dafür, dass Dieter bei drei Schüssen genau zweimal trifft. (10 BE)

3. An der Schießbude haben unsere Freunde insgesamt 8 rote und 6 weiße Rosen gewonnen.

   (a) Anja greift aus diesen 14 Rosen auf zufällige Weise 7 heraus. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass sie dabei 4 rote und 3 weiße Rosen erhält? (4 BE)

   (b) Anja ordnet die 4 roten und 3 weißen Rosen auf zufällige Weise in einer Reihe an. Wie groß ist die Wahrscheinlichkeit, dass dabei keine zwei gleichfarbigen Rosen nebeneinander zu liegen kommen? (5 BE)

4. „Jedes 4. Los gewinnt“, behauptet der Werbeslogan einer Losbude. Diese Behauptung soll anhand einer Stichprobe von 50 Losen getestet werden. Sind unter den 50 Losen weniger als 9 Gewinnlose, dann wird der Werbeslogan als falsch abgelehnt, andernfalls wird er akzeptiert. Mit welcher Wahrscheinlichkeit wird dabei der Werbeslogan zu Unrecht abgelehnt?

   Hinweis: Die Gesamtzahl aller Lose darf als groß gegenüber 50 angesehen werden. Rechnen Sie daher wie bei einer Stichprobe mit Zurücklegen. (8 BE)