Freie und Hansestadt Hamburg
Behörde für Bildung und Sport

Schriftliche Abiturprüfung
Schuljahr 2006/2007

Grundkurs Mathematik

Gymnasien, Gesamtschulen, berufsbildende Gymnasien

Zweittermin

Unterlagen für die Lehrerinnen und Lehrer

Diese Unterlagen sind nicht für die Prüflinge bestimmt.

Diese Unterlagen enthalten:

1 Allgemeines

- Weisen Sie bitte die Schülerinnen und Schüler auf die allgemeinen Arbeitshinweise am Anfang der Schülermaterialien hin.
- Die Schülerinnen und Schüler kennzeichnen ihre Unterlagen nur mit der Kursnummer und ihrer Schülernummer, nicht mit ihrem Namen.
- Die Arbeitszeit beträgt **240 Minuten.** Eine Einlesezeit von bis zu 30 Minuten kann gewährt werden. In dieser Zeit dürfen die Aufgaben aber noch nicht bearbeitet werden.
- Erlaubte Hilfsmittel: Nichtprogrammierbarer und nicht grafikfähiger Taschenrechner, Formelsammlung „Das große Tafelwerk interaktiv“, Cornelsen-Verlag, Operatorenliste, Rechtschreiblexikon.

2 Rückmeldebogen für die Zweitkorrektur

Bitte umgehend ausfüllen und an B 1-Z faxen!

Behörde für Bildung und Sport
B 1-Z

Fax 42 79 67-006

Schulchiffre:

Aufgabenstatistik und Information für die Zweitkorrektoren

in Fächern mit zentraler Aufgabenstellung

Fach: Mathematik, Grundkurs **Kurs-Nummer:** ________________

Bearbeitet wurden die folgenden Aufgaben:

Aufgabe Nr.	Anzahl	
I.1	von	Prüflingen
I.2	von	Prüflingen
II.1	von	Prüflingen
II.2	von	Prüflingen
III.1	von	Prüflingen
III.2	von	Prüflingen

Datum: _______________

Unterschrift: ___________________________________

3 Aufgabenauswahl

- Sie erhalten **sechs** Aufgaben – **I.1, I.2** (Analysis) und **II.1, II.2** (Lineare Algebra / Analytische Geometrie) und **III.1, III.2** (Stochastik).
- Sie wählen **genau drei Aufgaben aus genau den zwei Sachgebieten I und II** oder **I und III** aus und reichen diese an die Schülerinnen und Schüler weiter.
- Sie überprüfen gemeinsam mit den Schülerinnen und Schülern die Vollständigkeit der Arbeitsunterlagen.
- Die Schülerinnen und Schüler bearbeiten drei Aufgaben.
- Sie vermerken auf der Reinschrift, welche Aufgabe sie bearbeitet haben.

4 Korrekturverfahren

- Die Korrekturen werden gemäß der „Richtlinie für die Korrektur und Bewertung der Prüfungsleistungen im schriftlichen Teil der Abiturprüfung“ vorgenommen.
- Die Bewertung und Benotung der Arbeiten wird auf einem gesonderten Blatt vorgenommen, siehe Anlagen Bewertungsbögen für die Erst- und die Zweitkorrektur (s. Anlagen S. 4 und 5).
- Die Bewertungsbögen verbleiben in der Schule.
- Die Originale der Schülerarbeiten werden zusammen mit dem Bewertungsbogen für die Zweitkorrektur und einer Kursliste, die nur die Schülernummern enthalten darf, sowie einem Exemplar der Lehrermaterialien zu einem Päckchen gepackt.
- Zu den Zeitvorgaben, Warnmeldungen und dem weiteren Verlauf des Verfahrens siehe den „Ablaufplan für die Durchführung der schriftlichen Prüfungen“.

Bei der Korrektur der Schülerarbeiten kann es auf Grund von unterschiedlichen didaktischen Konzepten oder Verkürzungen auf Grund von Verabredungen zu unterschiedlichen Bewertungen von Schülerleistungen kommen, insbesondere im formalen Bereich. Bisher ließen sich solche unterschiedlichen Sichtweisen im Gespräch zwischen Referent und Korreferent klären.

Im Abitur mit zentralen Anteilen ist eine solche Klärung wegen des anonymisierten Korrekturverfahrens nicht möglich. Deshalb ist insbesondere auf Seiten des Korreferenten ein sensibles Vorgehen gefordert. Auch wenn der Korreferent eine andere Korrektheit von seinen Schülerinnen und Schülern fordern würde, sollte er darauf achten, ob der Referent bei seinen Korrekturen durchgängig anders verfahren ist. Es gilt der Grundsatz, dass die Schülerinnen und Schüler durch unterschiedliche Sichtweisen nicht benachteiligt werden dürfen.

Die Lösungsskizzen in den Erwartungshorizonten zu den einzelnen Aufgaben geben Hinweise auf die erwarteten Schülerleistungen. Oft sind aber verschiedene Lösungsvarianten möglich, die in der Skizze nur zum Teil beschrieben werden konnten. Grundsätzlich gilt deshalb, dass alle Varianten, die zu richtigen Lösungen führen, mit voller Punktzahl bewertet werden, unabhängig davon, ob die gewählte Variante in der Lösungsskizze aufgeführt ist oder nicht.

5 Aufgaben, Erwartungshorizonte und Bewertungen

Erwartungshorizont:

Kursiv gedruckte Passagen sind Hinweise an die korrigierenden Lehrkräfte. Sie sind nicht Bestandteile der erwarteten Schülerleistung.

Bewertung:

Jeder Aufgabe sind 100 Bewertungseinheiten (BWE) zugeordnet, insgesamt sind also 300 BWE erreichbar. Bei der Festlegung von Notenpunkten gilt die folgende Tabelle.

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 285	≥ 95 %	15
≥ 270	≥ 90 %	14
≥ 255	≥ 85 %	13
≥ 240	≥ 80 %	12
≥ 225	≥ 75 %	11
≥ 210	≥ 70 %	10
≥ 195	≥ 65 %	9
≥ 180	≥ 60 %	8

Bewertungs-einheiten	Erbrachte Leistung	Notenpunkte
≥ 165	≥ 55 %	7
≥ 150	≥ 50 %	6
≥ 135	≥ 45 %	5
≥ 120	≥ 40 %	4
≥ 99	≥ 33 %	3
≥ 78	≥ 26 %	2
≥ 57	≥ 19 %	1
< 57	< 19 %	0

Die Note „ausreichend“ (5 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd die Hälfte (mindestens 45 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden ist. Dazu muss mindestens eine Teilaufgabe, die Anforderungen im Bereich II aufweist, vollständig und weitgehend richtig bearbeitet werden.

Die Note „gut“ (11 Punkte) wird erteilt, wenn annähernd vier Fünftel (mindestens 75 %) der erwarteten Gesamtleistung erbracht worden sind. Dabei muss die Prüfungsleistung in ihrer Gliederung, in der Gedankenführung, in der Anwendung fachmethodischer Verfahren sowie in der fachsprachlichen Artikulation den Anforderungen voll entsprechen. Ein mit „gut“ beurteiltes Prüfungsergebnis setzt voraus, dass neben Leistungen in den Anforderungsbereichen I und II auch Leistungen im Anforderungsbereich III erbracht werden.

Bei erheblichen Mängeln in der sprachlichen Richtigkeit sind bei der Bewertung der schriftlichen Prüfungsleistung je nach Schwere und Häufigkeit der Verstöße bis zu drei Notenpunkte abzuziehen. Dazu gehören auch Mängel in der Gliederung, Fehler in der Fachsprache, Ungenauigkeiten in Zeichnungen sowie falsche Bezüge zwischen Zeichnungen und Text.

Abiturprüfung 2007

Bewertungsbogen Erstkorrektur

Schulchiffre		
Fach	Mathematik	
Kurstyp	GK	**Schüler-Nummer**
Kurs-Nummer		

BeBo EKo M

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

Abiturprüfung 2007

Bewertungsbogen Zweitkorrektur

Schulchiffre		**BeBo ZKo M**	
Fach	Mathematik	**Schüler-Nummer**	
Kurstyp	GK		
Kurs-Nummer			

Aufgaben Nummer (z.B. I.2) ↓	BWE je Teilaufgabe (nicht verwendete Felder bitte durchstreichen)							BWE pro Aufgabe ↓
	a)	b)	c)	d)	e)	f)	g)	
							Summe der BWE →	

Bewertungstext

Notenpunkte →	

Dieser Bogen kann auch aus dem Internet unter **www.hera.bbs.hamburg.de** mit dem Anmeldenamen **abschluss** und dem Passwort **pruefung** zum rechnergestützten Ausfüllen heruntergeladen werden.

________/________
Kurs-Nr. / Schüler-Nr.

ANALYSIS 1

I.1 Parkanlage

In einer historischen Parkanlage befindet sich ein geschwungener Wasserlauf, der durch den Graphen der Funktion w mit $w(x) = 0{,}001x^3 - 0{,}16x^2 + 6{,}5x$ mit der notwendigen Genauigkeit beschrieben wird. Die Breite des Wasserlaufs wird (zunächst) vernachlässigt.

Durch den Park führt eine Schmalspurbahn mit geradem Streckenverlauf, der durch den Graphen der Funktion b mit $b(x) = x$ gut dargestellt wird. Die Breite der Gleisanlage bleibt ebenfalls (zunächst) unberücksichtigt.

Alle Koordinaten in der Aufgabe sind in Metern angegeben.

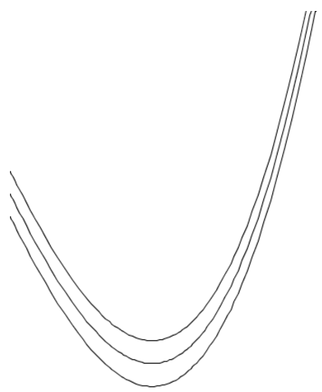
a) Die Graphen von w und b haben drei Schnittpunkte.
Bestätigen Sie, dass die Graphen von w und b sich in den Punkten (50 | 50) und (110 | 110) schneiden und geben Sie den dritten Schnittpunkt an.

b) Ermitteln Sie die Extrem- und Wendepunkte von w und runden Sie alle Ergebnisse auf die erste Nachkommastelle.
Zeichnen Sie die Graphen von w und b in das gegebene Koordinatensystem.

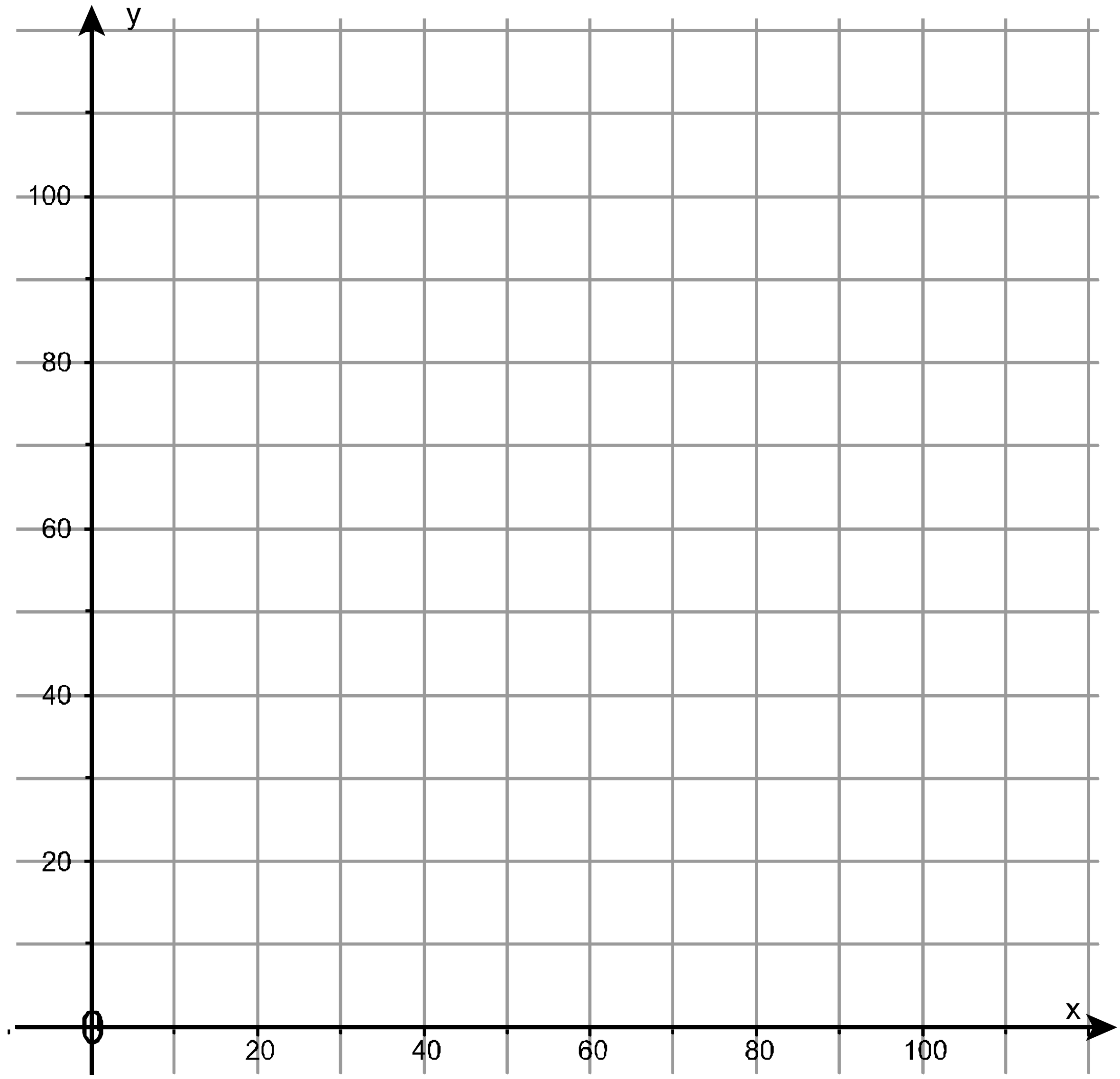
c) Die Flächen, die von der Bahnlinie und dem Wasserlauf eingeschlossen werden, sollen besonders aufwändig gärtnerisch gestaltet werden. Pro Quadratmeter werden 13 € veranschlagt. Es wird auf 10 m² genau abgerechnet.
Bestimmen Sie in dieser Genauigkeit die Größe der linken der beiden eingeschlossenen Flächen. Die rechte ist 2 880 m² groß.
Berechnen Sie die Kosten für die gärtnerische Gestaltung der beiden Flächen.

d) In der Nähe des Wasserlaufs beim Punkt (85 | 12) befindet sich die Ausflugsgaststätte „Parkperle“. Die „Parkperle“ will ein weiteres Geschäftsfeld entwickeln: Pop-Konzerte. Dafür wird ein neuer Starkstromanschluss zu einer Transformatorenstation gebraucht, die sich im Punkt (25 | 90) befindet.
Zeichnen Sie die Transformatorenstation und die „Parkperle“ ein.
Die von der Ausflugsgaststätte zur Station führende neue Elektroleitung soll möglichst kurz, also gerade sein. Der Wasserlauf soll nicht unterquert werden, weil das recht teuer wäre.
Beschreiben Sie, wie rechnerisch geklärt werden könnte, ob diese Forderungen erfüllbar sind oder nicht (explizite Rechnungen sind nicht gefordert).

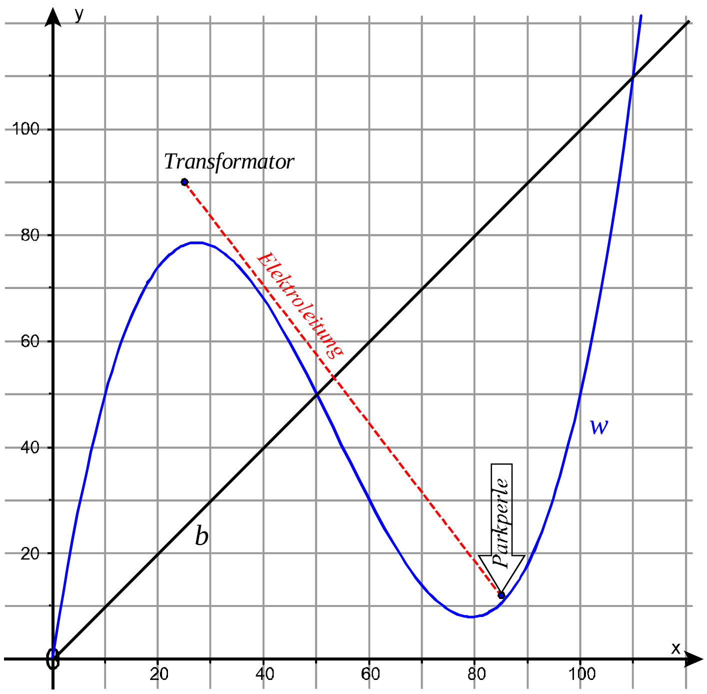
e) Ein Architekt soll für eine Anhörung die Zeichnung ansprechender gestalten. Wasserlauf und Bahnlinie sollen mit ihren wahren Breiten von 5 m bzw. 3 m maßstabsgerecht gezeichnet werden.
Der Architekt macht es sich leicht. Er zeichnet für den Bach die Kurve noch zweimal (quasi als Uferlinie), jeweils um 2,5 Einheiten nach oben bzw. nach unten verschoben. Entsprechend macht er es mit der Bahnlinie. Die Skizze rechts zeigt das Prinzip.
Bei der Bahnlinie sieht die Zeichnung zwar gut aus, ist aber nicht richtig. Beim Wasserlauf ist der Architekt vollkommen unzufrieden.
Beurteilen Sie das Vorgehen des Architekten.



Anlage zur Aufgabe Parkanlage



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es gilt $w(50) = 0{,}001 \cdot 50^3 - 0{,}16 \cdot 50^2 + 6{,}5 \cdot 50 = 50$ und analog $w(110) = 110$. (0 | 0) ist offenbar der dritte Schnittpunkt.	5		
b)	Die Nullstellen von w' mit $w'(x) = 0{,}003x^2 - 0{,}32x + 6{,}5$ sind die Lösungen der quadratischen Gleichung $0{,}003x^2 - 0{,}32x + 6{,}5 = 0 \Leftrightarrow x^2 - \frac{320}{3}x + \frac{6500}{3} = 0$. $x_1 = \frac{160}{3} + \sqrt{\left(\frac{160}{3}\right)^2 - \frac{6500}{3}} \approx 79{,}4$ und $x_2 \approx 27{,}3$. Es ist $w''(x) = 0{,}006x - 0{,}32$ und $w''(79{,}4) > 0,\ w''(27{,}3) < 0$. Daher folgt mit der hinreichenden Bedingung für lokale Extrempunkte die Existenz von $T(79{,}4\|8{,}0)$ und $H(27{,}3\|78{,}6)$. Jede ganzrationale Funktion dritten Grades hat genau einen Wendepunkt, dessen x-Koordinate die Nullstelle der zweiten Ableitung ist, also $W(53{,}3 \mid 43{,}3)$. Für die Zeichnung werden noch einige Punkte berechnet, z.B. $w(10) = 50$, $w(20) = 74$, $w(40) = 68$, $w(60) = 30$, $w(90) = 18$, $w(100) = 50$.  	10	25	
c)	Die Größe der rechten Fläche ist in der Aufgabe gegeben. Für die linke Fläche ist das Integral $\int_0^{50} (w(x) - b(x))dx = \int_0^{50} (0{,}001x^3 - 0{,}16x^2 + 5{,}5x)dx =$ $= \left[\frac{0{,}001}{4}x^4 - \frac{0{,}16}{3}x^3 + \frac{5{,}5}{2}x^2\right]_0^{50} \approx 1770$ zu berechnen. Die Kosten für $1770\,\mathrm{m}^2 + 2880\,\mathrm{m}^2 = 4650\,\mathrm{m}^2$ betragen 60 450 EUR.		20	

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>d)</td><td>Die Zeichnung wird ergänzt wie in der Lösung zu a) bereits eingetragen.

Explizite Rechnungen sind nicht gefordert. Es geht um die Beschreibung der Vorgehensweise.

Es kann die Gleichung einer Geraden durch die „Punkte“ Trafostation und „Parkperle“ aufgestellt werden, um dann zu prüfen, wie viele Schnittpunkte diese Gerade mit dem Graphen von w hat. Ist es nur ein Schnittpunkt, so ist zu untersuchen, ob die „Parkperle“ oberhalb oder unterhalb des Wasserlaufs ist. Im ersten Fall ist der Schnittpunkt ohne Bedeutung, im zweiten Fall sind die Trafostation und die Gaststätte auf verschiedenen Seiten des Flüsschens.
Wenn es mehr als einen Schnittpunkt der Geraden mit dem Wasserlauf gibt, sind die Forderungen nicht erfüllbar.

Hinweis: $w(85) \approx 10,6$.</td><td>5</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Die Bahnlinie sieht in der Zeichnung gut aus. Sie ist überall gleich breit, so dass der Fehler nicht auffällt: Die Bahn ist zu schmal dargestellt, denn ihre Breite ist vom Architekten senkrecht zur x-Achse, nicht aber senkrecht zum Verlauf der Bahn gemessen worden.

Der Wasserlauf ist gekrümmt. Das mehrfache Zeichnen des Graphen – senkrecht zur x-Achse verschoben – ergibt einen Bachlauf, der umso schmaler ist, je größer der Betrag der Steigung von w ist.

Das Vorgehen des Architekten ist also schon im Ansatz falsch.</td><td></td><td></td><td>20</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>20</td><td>60</td><td>20</td></tr>
</table>

_______/_______
Kurs-Nr. / Schüler-Nr.

ANALYSIS 2

I.2 Harry Potter

Die Potter – Manie

Auch wenn der neue Harry-Potter Band noch nicht erschienen ist, brodelt es in der Gerüchteküche schon heftig: Muss Harry Potter wirklich sterben? Der 7. und voraussichtlich letzte Band erscheint in der Nacht zum 21. Juli unter dem Titel *Harry Potter and the Deathly Hallows*. Auch dieser Band wird wieder ein Bestseller werden. Doch trotz aller Euphorie ging der Absatz bisher von Band zu Band zurück:
Waren bei dem Band *Harry Potter und der Stein der Weisen* noch insgesamt rund 5 Millionen auf dem deutschen Markt zu verkaufen, so waren es beim 6. Band *Harry Potter und der Halbblutprinz* nur noch rund 3 Millionen. Das tut dem Kult aber keinerlei Abbruch: Im Gegenteil, die Aufregung um die neuesten Abenteuer des Helden versetzen immer mehr kleine und große Menschen in Entzücken. Fieberhaft sehnt man die Stunde Null herbei, kostümiert erwartet man gemeinsam im Bücherladen den mitternächtlichen Moment, wo man endlich das (lange vorbestellte) deutsche Exemplar in Händen hält.
So wurden beispielsweise beim Band 6, der am 1.10.2005 auf dem deutschen Markt erschien, um Mitternacht 100.000 vorbestellte Bücher den Kunden übergeben und schon am Ende des ersten Verkaufstages war die Millionengrenze erreicht. Auch mit dem 7. Band wird diese Millionengrenze wohl schon am 1. Verkaufstag erreicht. Die Potter-Manie ist auch deshalb so spektakulär, weil innerhalb kürzester Zeit der größte Teil der Auflage verkauft wird.

Zur Modellierung der Entwicklung der Verkaufszahlen des 6. Bandes *Harry Potter und der Halbblutprinz* wird folgende Funktion vorgeschlagen:

$$f(t) = 3{,}1 - 3 \cdot 0{,}7^t \;,$$

wobei t die Zeit in Tagen seit Beginn der Auslieferung und $f(t)$ die bis dahin verkaufte Anzahl von Büchern (in Millionen) darstellt.

a) Bestätigen Sie, dass diese Funktion die im Text genannten drei Informationen zu den Verkaufszahlen richtig wiedergibt.

b) Bestimmen Sie die erste Ableitung f'.
Hinweis: Benutzen Sie dazu $f(t) = 3{,}1 - 3 \cdot 0{,}7^t = 3{,}1 - 3e^{(\ln 0{,}7)\cdot t}$.
Interpretieren Sie f' im Sachkontext.

c) Skizzieren Sie die Funktionsgraphen von f und f' in das vorgegebene Koordinatensystem.

d) Ermitteln Sie, nach etwa wie vielen Tagen (in diesem Modell) bereits 2 Millionen vom Band 6 verkauft wären.

Für den 7. und damit letzten Band gibt es ein anderes mathematisches Modell, nämlich

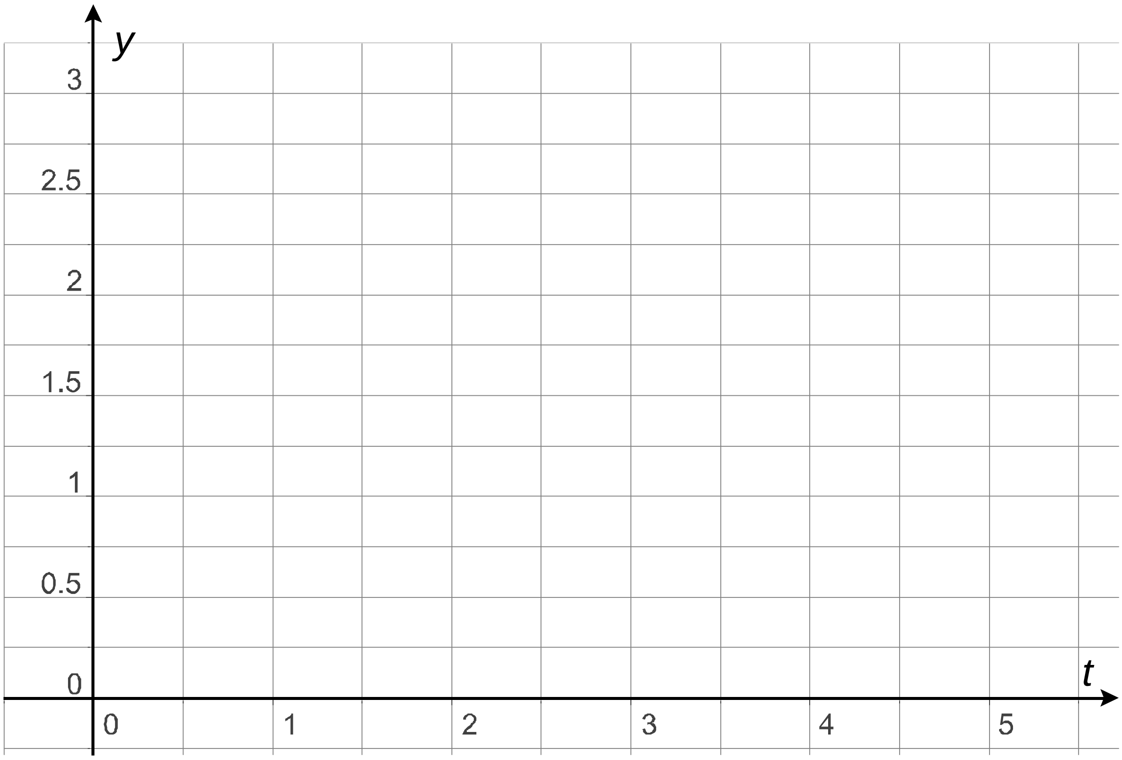
$$g(t) = \frac{a}{1 + e^{1-t}}$$

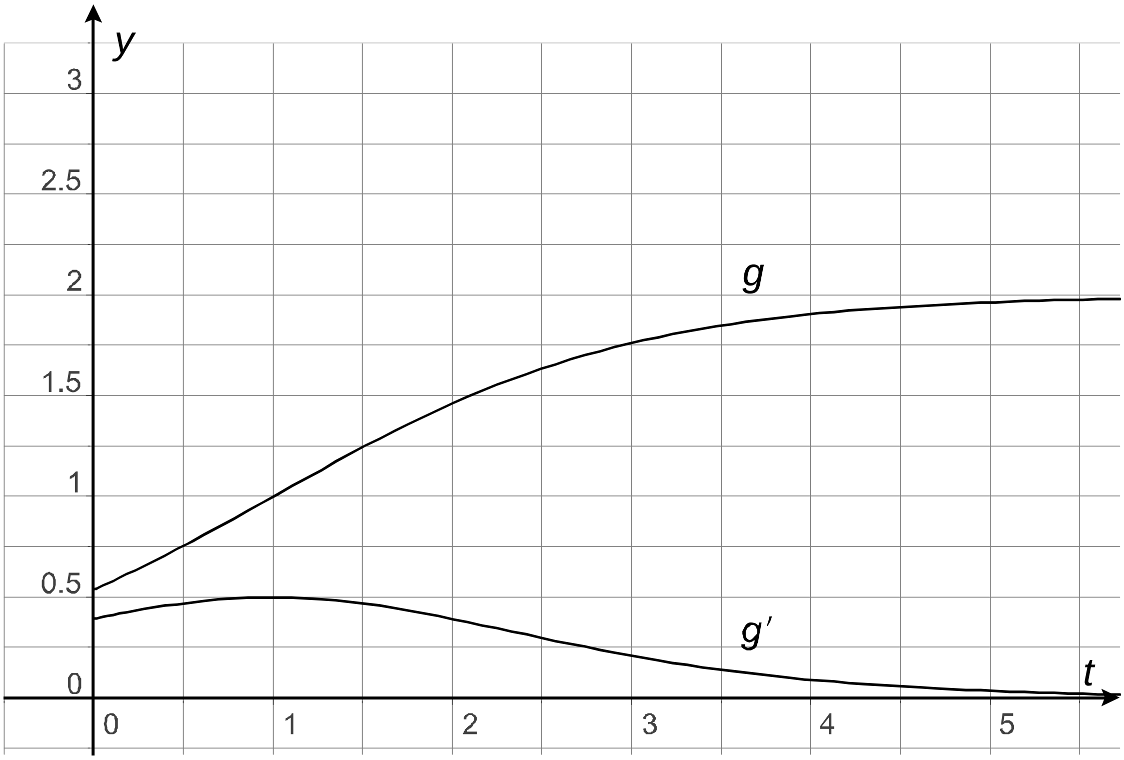
wobei wieder t die Zeit in Tagen seit Beginn der Auslieferung und $g(t)$ die bis dahin verkaufte Anzahl von Büchern darstellt.

e) Bestimmen Sie a so, dass g die Verkaufsprognose für den 7. Band (nämlich 1 Million verkaufter Bände bereits am ersten Tag) wiedergeben kann [Kontrollergebnis: $a = 2$], und ermitteln Sie, mit wie vielen verkauften Exemplaren man nach diesem Modell maximal rechnen kann.

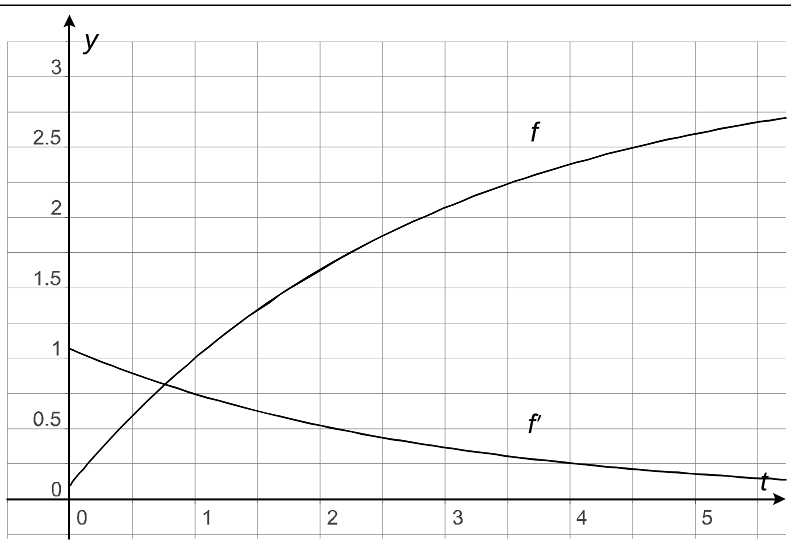
f) Im zweiten Koordinatensystem sind Ihnen ergänzend die Graphen von g und g' gegeben. Vergleichen Sie die Modellierungsansätze von g und f – auch unter Berücksichtigung der Ableitungen – und interpretieren Sie diese im Sachkontext der Aufgabe.

Anlage zur Aufgabe Harry Potter





Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Vorgeschlagene Funktion: $f(t) = 3{,}1 - 3 \cdot 0{,}7^t$, $t \in \mathbb{R}$. Aus dem Text sind für Harry Potter Band 6 folgende drei Informationen zu entnehmen: 1. Startwert $t = 0$, $f(0) = 0{,}1$ (in Millionen). 2. $f(1)= 1$. 3. Sättigung ca. 3, d.h. $\lim\limits_{x \to \infty} f(t) = 3$ *(muss nicht formal dargestellt werden)* <u>Überprüfung</u> 1. $f(0) = 3{,}1 - 3 \cdot 0{,}7^0 = 0{,}1$ ist richtig. 2. $f(1) = 3{,}1 - 3 \cdot 0{,}7^1 = 3{,}1 - 2{,}1 = 1$ ist richtig. 3. Die Überprüfung dieser Vorgabe kann durch eine theoretische Überlegung, aber auch durch Einsetzen geschehen (z.B. f(5) = 2,60; f(10) = 3,02; f(100) = 3,10). Alle Vorgaben des Textes werden erfüllt.	10	10	
b)	<u>1. Ableitung</u>: $f(t) = 3{,}1 - 3 \cdot 0{,}7^t = 3{,}1 - 3e^{(\ln 0{,}7)\cdot t} \Rightarrow f'(t) = -3(\ln 0{,}7)e^{(\ln 0{,}7)\cdot t}$ f' nimmt monoton ab, da $f'(t) = -3(\ln 0{,}7)e^{(\ln 0{,}7)\cdot t} = -3(-0{,}36)e^{-0{,}36t} = \frac{1{,}1}{e^{0{,}36t}}$, d.h. der Nenner wächst und der Zähler ist konstant, also wird der Bruch immer kleiner. <u>Interpretation im Sachkontext:</u> f' beschreibt, wie sich die Anzahl der verkauften Bücher über die Zeit verändert. Da f' positiv ist, bedeutet dies, dass immer noch weitere Bücher verkauft werden, die Tatsache aber, dass f' sich schon relativ bald (z.B. $f'(30) \approx 0{,}00002$) kaum noch von Null unterscheidet, macht deutlich, dass der Zuwachs an verkauften Büchern immer geringer wird, d.h. die Gesamtauflage wird fast vollständig in kurzer Zeit verkauft.		15	
c)		15		

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung I	II	III

d) Verkaufte Menge 2 Millionen, d.h.:

$$f(t) = 3{,}1 - 3 \cdot 0{,}7^t = 2$$

$$\frac{1{,}1}{3} = 0{,}7^t$$

$$t = 2{,}8\,,$$

also ist die 2-Millionen-Grenze nach ca. 3 Tagen erreicht.

I	II	III
	10	

e) Information aus dem Text: nach 1 Tag ist auch für Band 7 wiederum eine Million verkauft.

$$g(t) = \frac{a}{1+e^{1-t}} \quad \text{mit} \quad g(1) = 1$$

$$g(1) = \frac{a}{1+e^{1-1}} = 1$$

$$g(1) = \frac{a}{2} = 1$$

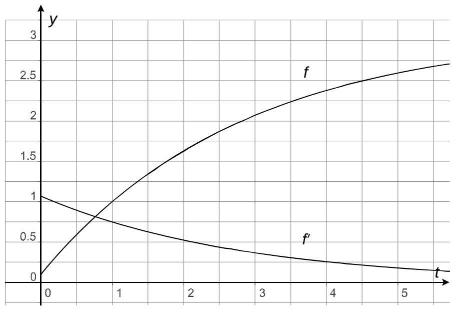
also folgt $a = 2$ und $g(t) = \dfrac{2}{1+e^{1-t}}$

Analog zur Rechnung bei b) lässt sich hier eine Marktsättigung bereits bei 2 Millionen feststellen.

I	II	III
	10	10

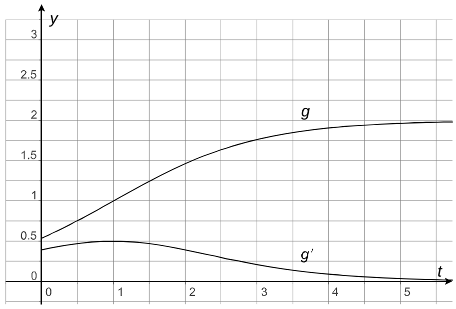
f)

Modell 1



$f\ (x \geq 0)$	$f'\ (x \geq 0)$
monoton wachsend	monoton fallend, $f'(x)$ positiv
Asymptote: y = 3,1	Asymptote: y = 0
$f(0) = 0{,}1$	$f'(0) \approx 1{,}1$

Modell 2



$g\ (x \geq 0)$	$g'\ (x \geq 0)$
monoton wachsend	Maximum bei (1 | ½), $g'(x)$ positiv
Asymptote: y = 2	Asymptote: y = 0
$g(0) \approx 0{,}54$	$g'(0) \approx 0{,}39$

(Tabelle und Graphen an dieser Stelle nicht verlangt)

<u>Vorschläge für Vergleich der Modelle und Interpretationsansätze:</u>

Beide Modelle stimmen darin überein, dass die betrachteten Funktionen – ausgehend jeweils von einem festen Wert – streng monoton steigen und dass sie sich jeweils einer Obergrenze nähern. Das macht Sinn, weil um Mitternacht schon vorbestellte Bücher zur Auslieferung kommen, weil die Anzahlen der insgesamt verkauften Bücher steigen müssen, da ja keine Bücher zurückgegeben werden können, und weil über kurz oder lang auch kaum noch Bücher verkauft werden können.

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Die beiden Funktionen unterscheiden sich in den Anfangswerten, den Obergrenzen und der Zeit, bis diese fast vollständig erreicht werden. Bei *f* hat die Ableitung einen gegenüber der Ableitung von *g* relativ hohen positiven Anfangswert. Diese stets positive Ableitung fällt monoton, während sie bei *g* bis zum Ende des ersten Tages noch geringfügig steigt. Das sind vernünftige denkbare Modelle, wenn man annimmt, dass wegen des spekulierten Endes von Harry Potter die Anfangseuphorie beim 7. Band sehr hoch ist, dann aber das Interesse schnell erlahmt und damit auch schnell die „Sättigungsgrenze“ erreicht wird. Die Ableitung kann man interpretieren als Interesse an dem jeweiligen Band. Die besondere Situation des voraussichtlich letzten Bandes wird dann auch sinnvoll durch das beschriebene Verhalten der Ableitung modelliert. Ein Mangel beider Modelle könnte sein, dass die Sättigungsgrenze zu schnell erreicht ist, was wohl nicht der Realität entspricht.		10	10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

________/________
Kurs-Nr. / Schüler-Nr.

LA/AG 1

II.1 Spielzeugsteine

Ein Unternehmen hat eine neue Art von Spielzeugsteinen entwickelt. Es gibt dabei vier unterschiedliche Spielzeugsteine S_1, S_2, S_3 und S_4. Aus diesen Spielzeugsteinen lassen sich vier unterschiedliche Baugruppen B_1, B_2, B_3 und B_4 zusammensetzen. Auf dem Markt sollen folgende drei Verpackungseinheiten unterschiedlicher Größe angeboten werden:
Mini-Box (E_1), Standard-Box (E_2) und Big-Box (E_3).

Die folgenden Tabellen geben an,

wie viele der einzelnen Spielzeugsteine zu je einer Baugruppe zusammengestellt werden:
(Spielzeugsteine → Baugruppen)

	B_1	B_2	B_3	B_4
S_1	4	3	4	0
S_2	7	5	2	8
S_3	5	3	0	3
S_4	2	4	4	6

wie viele der einzelnen Baugruppen für je eine Verpackungseinheit benötigt werden:
(Baugruppen → Verpackungseinheiten)

	E_1	E_2	E_3
B_1	1	3	5
B_2	3	$\boldsymbol{a_1}$	6
B_3	1	$\boldsymbol{a_2}$	4
B_4	2	3	6

wie viele der einzelnen Spielzeugsteine in je einer der Verpackungseinheiten enthalten sind:
(Spielzeugsteine → Verpackungseinheiten)

	E_1	E_2	E_3
S_1	17	32	54
S_2	40	69	121
S_3	20	36	61
S_4	30	48	86

a) In der Baugruppen/Verpackungseinheiten-Tabelle fehlen zwei Angaben.
Ermitteln Sie die fehlenden Werte a_1 und a_2.
Beschreiben Sie die Bedeutung von a_1 und a_2.
Hinweis: Für die weiteren Berechnungen sei $a_1 = 4$ und $a_2 = 2$.

Die <u>Herstellkosten</u> in GE für die unterschiedlichen Spielzeugsteine und Verpackungseinheiten und die auf dem Markt zu erzielenden <u>Preise</u> in GE entnehmen Sie den folgenden Tabellen:

Herstellkosten

Spielzeugsteine	S_1	S_2	S_3	S_4
Herstellkosten	0,04	0,02	0,04	0,03

Preise

Verpackungseinheiten	E_1	E_2	E_3
Preise	7,95	12,95	17,95

Verpackungseinheiten	E_1	E_2	E_3
Herstellkosten	0,8	1,2	1,5

Für das Zusammenstellen der Baugruppen fallen keine Kosten an.

Die anteiligen fixen Kosten für den folgenden Kundenauftrag betragen 15400 GE.

Das Unternehmen hat für den kommenden Monat Kundenaufträge über die Lieferung von 1800 Verpackungseinheiten E_1 (Mini-Box), 900 Verpackungseinheiten E_2 (Standard-Box) und 1200 Verpackungseinheiten E_3 (Big-Box) erhalten.

b) Berechnen Sie die Anzahlen der Spielzeugsteine S_1, S_2, S_3 und S_4, die zur Abwicklung dieser Aufträge benötigt werden.

c) Bestimmen Sie die Gesamtkosten, und berechnen Sie den Gesamterlös und den Gesamtgewinn für die Abwicklung dieser Aufträge.

d) Nach Erledigung eines Kundenauftrages liegen noch folgende Restbestände an Spielzeugsteinen im Lager: 7180 von S_2, 3660 von S_3, 5140 von S_4.

Ermitteln Sie die Anzahl der drei Verpackungseinheiten E_1 , E_2 und E_3 , die noch zusammengestellt werden können, wenn das Lager vollständig geräumt werden soll, und berechnen Sie die Anzahl der Spielzeugsteine, die von S_1 zur Zusammenstellung der Verpackungseinheiten benötigt werden.

e) Der Lagermeister des Unternehmens behauptet, dass unabhängig von den Lagerbeständen der Spielzeugsteine S_2, S_3 und S_4 das Lager grundsätzlich vollständig geräumt werden kann, wenn die entsprechende Anzahl an Spielzeugsteinen von S_1 zur Verfügung stehen.

Beurteilen Sie, ob der Lagermeister mit seiner Aussage Recht hat.

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>Die Matrix A beschreibe die Tabelle Spielsteine → Baugruppen, B die Tabelle Baugruppen → Verpackungseinheiten und C die Tabelle Spielzeugsteine → Verpackungseinheiten. Dann muss gelten $A \cdot B = C$ mit
$A = \begin{pmatrix} 4 & 3 & 4 & 0 \\ 7 & 5 & 2 & 8 \\ 5 & 3 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & 4 & 6 \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 3 & a_1 & 6 \\ 1 & a_2 & 4 \\ 2 & 3 & 6 \end{pmatrix}; C = \begin{pmatrix} 17 & 32 & 54 \\ 40 & 69 & 121 \\ 20 & 36 & 61 \\ 30 & 48 & 86 \end{pmatrix}$

Eine vollständige Matrizenmultiplikation ist <u>nicht</u> erforderlich, weil zwei Gleichungen zur Bestimmung von a_1 und a_2 ausreichen. Auf die Überprüfung der Erfüllbarkeit kann verzichtet werden, weil das Modell von einer eindeutigen Matrizengleichung $A \cdot B = C$ ausgeht.

<u>Lösungsbeispiel:</u>
Durch Multiplikation der dritten und der ersten Zeile der Matrix A mit der zweiten Spalte der Matrix B und dem Vergleich mit den entsprechenden Werten der Matrix C ergeben sich folgende beiden Gleichungen:
$15 + 3a_1 + 9 = 36 \quad \Rightarrow \quad a_1 = 4$ einsetzen
$12 + 3 \cdot 4 + 4a_2 + 0 = 32 \quad \Rightarrow \quad a_2 = 2$

a_1 gibt an, wie viele Baugruppen von B_2 für die Verpackungseinheit E_2 benötigt werden, und a_2, wie viele Baugruppen von B_3 für dieselbe Verpackungseinheit E_2, denn a_1 und a_2 sind in derselben Spalte.
Wird die dritte Zeile nicht genutzt, ergeben sich zwei Gleichungen mit zwei Unbekannten. Der Rechenaufwand ist dann etwas größer.</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>$\begin{pmatrix} 17 & 32 & 54 \\ 40 & 69 & 121 \\ 20 & 36 & 61 \\ 30 & 48 & 86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1800 \\ 900 \\ 1200 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 124200 \\ 279300 \\ 141600 \\ 200400 \end{pmatrix}$

Für den kommenden Monat werden an Spielzeugsteinen benötigt:
124 200 von S_1, 279 300 von S_2, 141 600 von S_3 und 200 400 von S_4.</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>Gesamtkosten = Herstellkosten Spielzeugsteine + Herstellkosten Verpackungseinheiten + fixe Kosten

Herstellkosten Spielsteine =
(124200|279300|1416000|200400) · (0,04|0,02|0,04|0,03) =
22 230

Herstellkosten Verpackungseinheiten =
(1800|900|1200) · (0,8|1,2|1,5) =
4 320

Gesamtkosten = 22 230 + 4 320 + 15 400 = 41 950</td><td></td><td></td><td></td></tr>
</table>

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td></td><td>Die Gesamtkosten für den Auftrag betragen 41 950 GE.

Gesamterlös = (1800|900|1200) · (7,95|12,95|17,95) = 47 505.
Der Gesamterlös für den Auftrag beträgt 47 505 GE.

Gesamtgewinn = Gesamterlös – Gesamtkosten = 47 505 – 41 950 = 5 555.
Der Gesamtgewinn für den Auftrag beläuft sich auf 5 555 GE.</td><td>15</td><td>15</td><td></td></tr>
<tr><td>d)</td><td>Sei e_i die Anzahl der zu produzierenden Verpackungseinheiten E_i (i = 1, 2, 3), s_1 sei die Anzahl der dabei benötigten Spielzeugsteine von S_1. Dann gilt:
$$\begin{pmatrix} 17 & 32 & 54 \\ 40 & 69 & 121 \\ 20 & 36 & 61 \\ 30 & 48 & 86 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s_1 \\ 7180 \\ 3660 \\ 5140 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{matrix} 17e_1 + & 32e_2 + & 54e_3 = & s_1 \\ 40e_1 + & 69e_2 + & 121e_3 = & 7180 \\ 20e_1 + & 36e_2 + & 61e_3 = & 3660 \\ 30e_1 + & 48e_2 + & 86e_3 = & 5140 \end{matrix}$$
Möglicher Lösungsweg (Berechnung von e_i unter Verwendung der letzten drei Gleichungen):
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 69 & 121 & 7180 \\ 20 & 36 & 61 & 3660 \\ 30 & 48 & 86 & 5140 \end{array}\right) \xrightarrow[-4\cdot III+3\cdot I]{2\cdot II-I} \left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 69 & 121 & 7180 \\ 0 & 3 & 1 & 140 \\ 0 & 15 & 19 & 980 \end{array}\right) \xrightarrow[III-5\cdot II]{}$$
$$\left(\begin{array}{ccc|c} 40 & 69 & 121 & 7180 \\ 0 & 3 & 1 & 140 \\ 0 & 0 & 14 & 280 \end{array}\right)$$
Durch Rückwärtseinsetzen erhält man: $e_3 = 20$, $e_2 = 40$ und $e_1 = 50$
Durch Einsetzen der ermittelten Werte in die (ursprünglich) erste Gleichung ergibt sich: $s_1 = 3210$

Es lassen sich noch 50 Verpackungseinheiten E_1 und 40 Verpackungseinheiten E_2 und 20 Verpackungseinheiten E_3 aus den Lagerbeständen fertigen. Hierfür werden noch 3210 Spielzeugsteine von S_1 benötigt.</td><td></td><td>20</td><td>5</td></tr>
<tr><td>e)</td><td>Das Gleichungssystem ist zwar in jedem Fall lösbar, aber die Lagerbestände können nur dann vollständig aufgebraucht werden, wenn der Lösungsvektor keine negativen Komponenten enthält. Der Lagermeister hat also nicht Recht.

Auch die Angabe eines Gegenbeispiels ist eine richtige Lösung.</td><td></td><td></td><td>15</td></tr>
<tr><td></td><td>Insgesamt 100 BWE</td><td>25</td><td>55</td><td>20</td></tr>
</table>

_________/_________
Kurs-Nr. / Schüler-Nr.

LA/AG 2

II.2 Dachzimmer

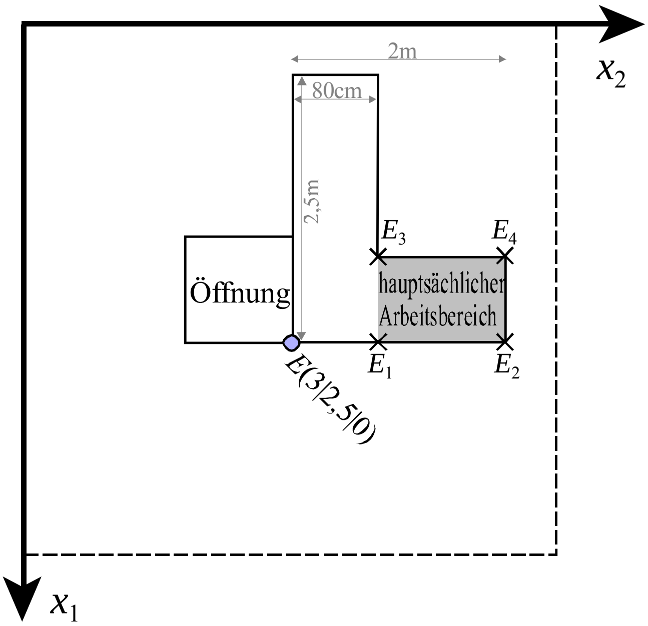
Für den Verwalter eines Mietshauses soll in dem kürzlich ausgebauten Dachzimmer ein Arbeitszimmer eingerichtet werden. Die Grundfläche des Zimmer ist quadratisch und 25 m^2 groß. Die schräge Decke kann in einem Koordinatensystem durch die Eckpunkte $A(0 \mid 0 \mid 3{,}5)$, $B(5 \mid 0 \mid 1)$, $C(5 \mid 5 \mid 1)$ und $D(0 \mid 5 \mid 3{,}5)$ beschrieben werden. Dabei entspricht 1 Längeneinheit einem Meter.

a) Zeichnen Sie das Arbeitszimmer in das beigefügte Koordinatensystem ein.

Im Fußboden des Dachzimmers, für den hier $x_3 = 0$ ist, befindet sich eine quadratische Öffnung mit der Größe 1 m^2, durch die das Zimmer erreichbar ist.

In dem Zimmer soll ein L-förmiger Schreibtisch für den Verwalter stehen. Dieser Schreibtisch steht mit einer Längsseite an einer Kante der Öffnung (vergleiche Skizze: *Kennzeichnung des Schreibtischbereiches auf dem Fußboden*). Die Außenkanten des Schreibtisches sind 2 m und 2,5 m lang. Er ist 80 cm breit.

Der in der Skizze markierte Punkt E hat die Koordinaten $(3 \mid 2{,}5 \mid 0)$.



b) Untersuchen Sie, ob im Bereich des Schreibtisches die Deckenhöhe mindestens 2 m ist.

Der Schreibtisch ist so platziert, dass die Fläche, an der der Verwalter hauptsächlich arbeitet, direkt unter dem Dachfenster liegt. Diese Arbeitsfläche ist der kurze Schenkel des Schreibtisches (gekennzeichnete Fläche der Skizze).

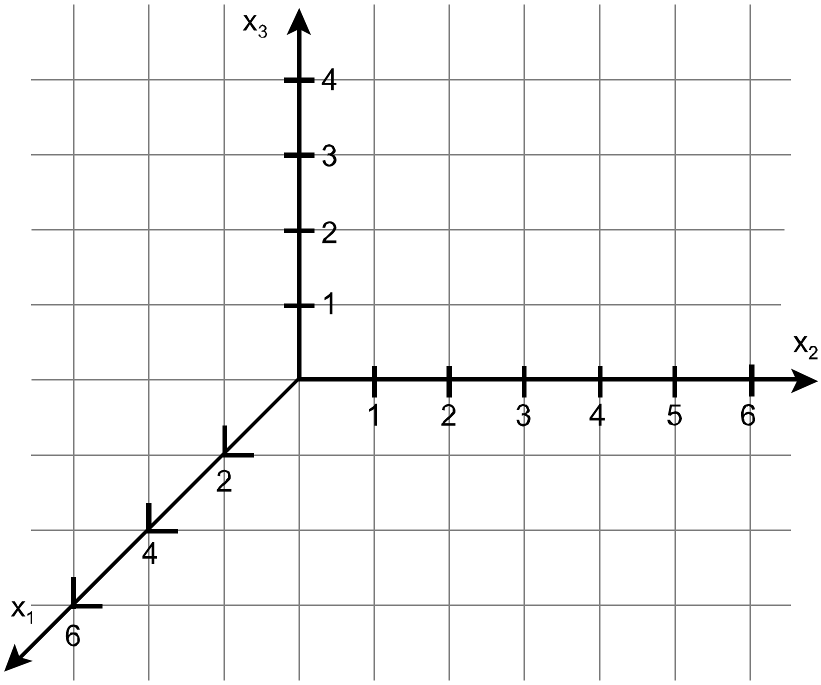
c) Geben Sie die Koordinaten der Eckpunkte E_1 bis E_4 des auf dem Fußboden gekennzeichneten hauptsächlichen Arbeitsbereiches an.
Bestimmen Sie damit die Koordinaten der Eckpunkte des Dachfensters.

d) Bestimmen Sie die Größe der Fläche des Dachfensters.

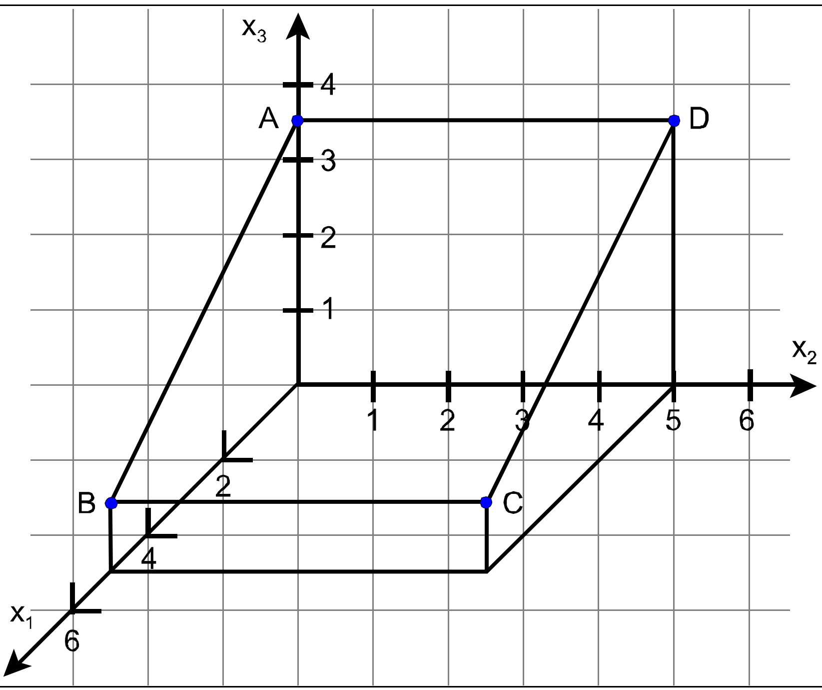
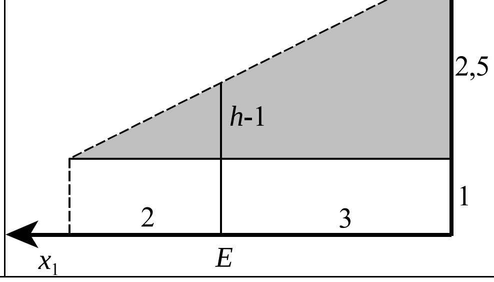
Auf dem Dach sind Scheinwerfer befestigt, die ein gegenüberliegendes Denkmal beleuchten.
Ein Scheinwerfer ist bei dem letzten Sturm so verdreht worden, dass sein Lichtkegel nun das ganze Dachfenster anstrahlt. Diese punktförmige Lichtquelle befindet sich 1,5 m senkrecht über dem Dachpunkt C.

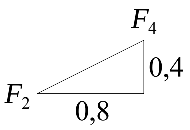
e) Beurteilen Sie, ob ein Lichtstrahl von dieser Lichtquelle auf die Mitte der Bodenöffnung treffen kann.

Anlage zur Aufgabe Dachzimmer



Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Zeichnung: 	15		
b)	Die Deckenebene läßt sich mit den Vektoren $\overrightarrow{0B}$, $\overrightarrow{BC}$, $\overrightarrow{BA}$ darstellen: $E\colon\ \overrightarrow{X}=\overrightarrow{0B}+r\cdot\overrightarrow{BC}+s\cdot\overrightarrow{BA}=\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\2{,}5\end{pmatrix}$ mit $r,s\in\mathbb{R}$. Es reicht aus, einen Bodenpunkt mit x_1-Koordinate 3 zu wählen, da dort wegen der Neigung die geringste Zimmerhöhe vorliegt (untere Kante des Tisches) z.B. (3 | 0 | 0) *(auch E, E_1,… können gewählt werden, Rechnung bleibt unverändert)*. Aus der Gleichung $\begin{pmatrix}5\\0\\1\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}0\\5\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}-5\\0\\2{,}5\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}3\\0\\h\end{pmatrix}$ folgt $s = 0{,}4$ und somit $h = 2$. Die geringste Deckenhöhe im Bereich des Schreibtisches ist also 2 Meter. <u>Alternative geometrische Lösung:</u>  In nebenstehendem Schnitt entlang der x_1-x_3-Ebene ist grau unterlegt eine Strahlensatz-Situation erkennbar: $\frac{h-1}{2{,}5}=\frac{2}{5}\Rightarrow h=2.$		25	

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
c)	Die vier Ortskoordinaten der Punkte E_1 bis E_4 ergeben sich aus den Koordinaten von E und den Maßangaben für den Schreibtisch: $E_1 = (3 \mid 3{,}3 \mid 0)$, $E_2 = (3 \mid 4{,}5 \mid 0)$, $E_3 = (2{,}2 \mid 3{,}3 \mid 0)$, $E_4 = (2{,}2 \mid 4{,}5 \mid 0)$. Die Deckenhöhe über E_1 und E_2 beträgt nach Teilaufgabe b) 2 m. Die darüber liegenden Eckpunkte des Fensters lauten daher $F_1 = (3 \mid 3{,}3 \mid 2)$, $F_2 = (3 \mid 4{,}5 \mid 2)$. Die Deckenhöhe über den anderen beiden Punkten, also die x_3-Koordinate der bei zugehörigen Fenstereckpunkte, muss noch ermittelt werden. Sei dazu $F_3 = (2{,}2 \mid 3{,}3 \mid h)$. Dieser Punkt liegt in der Dachebene: $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}2 \\ 3{,}3 \\ h \end{pmatrix}.$ Aus Zeile I folgt $s = 0{,}56$ (r wird nicht benötigt). s eingesetzt in Zeile III ergibt $h = 2{,}4$. Damit ist $F_3 = (2{,}2 \mid 3{,}3 \mid 2{,}4)$ und $F_4 = (2{,}2 \mid 4{,}5 \mid 2{,}4)$. <u>Alternative geometrische Lösung für die Deckenhöhe:</u> Eine angepasste Situation beim Strahlensatz liefert $\frac{h-1}{2{,}5} = \frac{2{,}8}{5} \Rightarrow h - 1 = 1{,}4$.	10	15	
d)	Die Fläche ist ein Rechteck mit einer Breite von 1,2 (m) (parallel zur x_2-Achse) und einer noch zu ermittelnden Höhe (auf der Dachebene parallel zur x_1-x_3-Ebene).  Nach nebenstehender Skizze ist die Höhe $\sqrt{0{,}8^2 + 0{,}4^2}$. Als Flächenmaß folgt nun $1{,}2 \cdot \sqrt{0{,}8^2 + 0{,}4^2} \approx 1{,}07$. Das Dachfenster ist etwa 1,1 m² groß.		15	
e)	<u>Gerade durch Mitte der Bodenöffnung und Scheinwerferstandort:</u> Mitte der Bodenöffnung: $M = (2{,}5 \mid 2 \mid 0)$, Scheinwerferstandort: $P = (5 \mid 5 \mid 2{,}5)$. Mit M als Stützpunkt und $\overrightarrow{MP}$ als Richtungsvektor folgt die gesuchte Gerade g: $\vec{x} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}.$ <u>Überprüfen, ob Gerade g durch Fenster verläuft:</u> Schnittpunkt Grade g mit Dachebene: $\begin{pmatrix} 5 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + r \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix} + s \cdot \begin{pmatrix} -5 \\ 0 \\ 2{,}5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + t \cdot \begin{pmatrix} 2{,}5 \\ 3 \\ 2{,}5 \end{pmatrix}$ Gleichung I bedeutet $2{,}5 - 5\,s = 2{,}5\,t$, also $t = 1 - 2\,s$. Eingesetzt in III folgt: $1 + 2{,}5\,s = 2{,}5 - 5\,s \Rightarrow 7{,}5\,s = 1{,}5 \Rightarrow s = 0{,}2$ und damit ist $t = 0{,}6$. Die Gerade g schneidet das Dach in $S = (4 \mid 3{,}8 \mid 1{,}5)$ und daher nicht im Bereich des Dachfensters, da z.B. die x_3-Koordinate (Höhe) zu gering ist. Es trifft also kein Lichtstrahl von P die Mitte der Bodenöffnung.			20

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20

________/________
Kurs-Nr. / Schüler-Nr.

STOCHASTIK 1

III.1 Handy

Das neue Superfunktions-Handy der Firma „Datafunk“ ist durch eine große Werbeaktion eingeführt worden. Der Werbeagentur „Multiwerb“ ist es gelungen, das neue Handy bei 55 % der 14- bis 20-Jährigen und bei 20 % der über 20-Jährigen bekannt zu machen.
Es soll weiterhin angenommen werden, dass es 5-mal so viele Menschen gibt, die über 20 Jahre alt sind, als es Menschen gibt, die 14- bis 20-Jahre alt sind.

a) Berechnen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass von drei zufällig herausgegriffenen Personen aus der Altersgruppe der 14- bis 20-Jährigen
   - mindestens eine das Handy kennt.
   - alle 3 Personen das Handy kennen.

b) Berechnen Sie den von „Multiwerb“ insgesamt erreichten Mindest-Bekanntheitsgrad des neuen Handys bei der Gruppe aller Personen, die mindestens 14 Jahre alt sind.

c) Bestimmen Sie die Wahrscheinlichkeit, dass eine zufällig ausgewählte Person, die mindestens 14 Jahre alt ist und das Handy kennt, über 20 Jahre ist.

Falls es der Werbeagentur gelungen ist, das neue Handy bei deutlich mehr als 55 % der 14-bis 20-Jährigen bekannt zu machen, soll sie von „Datafunk“ eine Extraprämie erhalten.
Die Entscheidung soll aufgrund einer Befragung von 1000 Personen getroffen werden.

d) Ermitteln Sie eine Entscheidungsregel, bei der die Wahrscheinlichkeit, dass „Multiwerb“ die Extraprämie zu Unrecht erhält, höchstens 1% beträgt unter der Bedingung, dass nicht mehr als 55% der 14-bis 20-Jährigen das Handy von „Datafunk“ kennen (Signifikanztest auf dem 1 %-Niveau).

e) Ermitteln Sie die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „Multiwerb“ die Prämie nicht erhält, obwohl 60% der 14- bis 20-Jährigen von dem Superhandy erfahren haben.
   Die Entscheidungsregel aus Aufgabe d) wird beibehalten.
   Ermitteln Sie analog die Wahrscheinlichkeit dafür, dass „Multiwerb“ die Prämie nicht erhält, obwohl 65% der 14- bis 20-Jährigen von dem Superhandy erfahren haben.

f) Interpretieren Sie die Ergebnisse von d) und e) im Sachkontext der Aufgabe.

Anlage zur Aufgabe Handy

Summierte Binomialverteilung
(Tabellenauszug)

n	k	p					
		0,4	0,45	0,5	0,55	0,6	0,65
1000	577	1,0000	1,0000	1,0000	0,95998	0,07351	0,00000
	578	1,0000	1,0000	1,0000	0,96519	0,08288	0,00000
	579	1,0000	1,0000	1,0000	0,96982	0,09312	0,00000
	580	1,0000	1,0000	1,0000	0,97394	0,10428	0,00000
	581	1,0000	1,0000	1,0000	0,97757	0,11637	0,00000
	582	1,0000	1,0000	1,0000	0,98077	0,12944	0,00000
	583	1,0000	1,0000	1,0000	0,98357	0,14348	0,00001
	584	1,0000	1,0000	1,0000	0,98602	0,15853	0,00001
	585	1,0000	1,0000	1,0000	0,98814	0,17458	0,00001
	586	1,0000	1,0000	1,0000	0,98998	0,19162	0,00002
	587	1,0000	1,0000	1,0000	0,99157	0,20966	0,00002
	588	1,0000	1,0000	1,0000	0,99293	0,22866	0,00003
	589	1,0000	1,0000	1,0000	0,99409	0,24860	0,00004
	590	1,0000	1,0000	1,0000	0,99508	0,26943	0,00005
	591	1,0000	1,0000	1,0000	0,99592	0,29111	0,00006
	592	1,0000	1,0000	1,0000	0,99663	0,31358	0,00008
	593	1,0000	1,0000	1,0000	0,99723	0,33676	0,00010
	594	1,0000	1,0000	1,0000	0,99773	0,36059	0,00013

Erwartungshorizont

<table>
<tr><th rowspan="2"></th><th rowspan="2">Lösungsskizze</th><th colspan="3">Zuordnung, Bewertung</th></tr>
<tr><th>I</th><th>II</th><th>III</th></tr>
<tr><td>a)</td><td>
Es kann die Binomialverteilung B(3; 0,55) vorausgesetzt werden.
Dann ist $P(\textit{"mindestens eine Person kennt das Handy"}) = 1 - 0,45^3 \approx 0,91$.
Es ist auch die direkte Berechnung möglich: $\sum_{k=1}^{3} \binom{3}{k} \cdot 0,55^k \cdot 0,45^{3-k} \approx 0,91$.

Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens einer der Jugendlichen das Handy kennt, beträgt fast 91%.
Die Wahrscheinlichkeit, dass alle 3 Jugendlichen das Handy kennen, beträgt dagegen nur knapp 17%: $0,55^3 \approx 0,17$
</td><td>20</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>b)</td><td>
Der erreichte Bekanntheitsgrad in der Gruppe aller mindestens 14-Jährigen ist etwa 25,8%, denn $\frac{1}{6} \cdot 0,55 + \frac{5}{6} \cdot 0,2 \approx 0,258$.
</td><td>10</td><td></td><td></td></tr>
<tr><td>c)</td><td>
<u>1. Lösung:</u>
Seien B = „Handy bekannt und Alter mindestens 14“ und A = „Alter über 20“.
Dann ist die bedingte Wahrscheinlichkeit $P(A \mid B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$ gesucht.
$P(B)$ ist nach Aufgabenteil b) etwa 0,258.
$A \cap B$ = „Handy bekannt und Alter über 20“, also ist $P(A \cap B) = 0,2 \cdot \frac{5}{6} \approx 1,67$.
Die gesuchte Wahrscheinlichkeit beträgt damit fast 65%: $\frac{0,167}{0,258} \approx 0,647$.
<u>2. Lösung:</u>
Vierfeldertafel zur Bestimmung der bedingten Wahrscheinlichkeiten:
H = „Handy ist bekannt“; Altersbereiche: $U = "\leq 20"$ und $\overline{U} = "> 20"$
<table>
<tr><th></th><th>U</th><th>$\overline{U}$</th><th></th></tr>
<tr><td>H</td><td>0,0917</td><td>0,167</td><td>0,258</td></tr>
<tr><td>$\overline{H}$</td><td>0,075</td><td>0,667</td><td>0,742</td></tr>
<tr><td></td><td>1/6</td><td>5/6</td><td></td></tr>
</table>
Damit ist die gesuchte Wahrscheinlichkeit $P(\overline{U} \mid H) = \frac{0,167}{0,258} = 0,647$

<u>3. Lösung (Formel von Bayes):</u>
Übertragen auf die Aufgabensituation lautet diese Formel:
$$P(\overline{U} \mid H) = \frac{P(\overline{U}) \cdot P(H \mid \overline{U})}{P(\overline{U}) \cdot P(H \mid \overline{U}) + P(U) \cdot P(H \mid U)} \approx \frac{\frac{5}{6} \cdot 0,167 \cdot \frac{6}{5}}{\frac{5}{6} \cdot 0,167 \cdot \frac{6}{5} + \frac{1}{6} \cdot 0,0917 \cdot 6} \approx 0,645$$
</td><td></td><td>20</td><td></td></tr>
</table>

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
d)	T = Anzahl der Personen, die bei der Befragung angeben, das neue Handy zu kennen. Nullhypothese H_0: T ist nach $B(1000;\,p)$-verteilt mit $p \leq 0{,}55$. Große Werte von T sprechen gegen die Nullhypothese. Der Ablehnungsbereich sollte also folgende Struktur haben: $A = \{T > k\}$ k ist – möglichst klein – so zu wählen, dass der Fehler 1. Art $\leq 0{,}01$ beträgt. Dieser Fehler lässt sich nach oben abschätzen, wenn man H_0 ersetzt durch H'_0: T ist nach $B(1000\,;\,0{,}55)$-verteilt. Entscheidungsregel: „Multiwerb“ erhält die Prämie dann, wenn mehr als k Personen das neue Handy kennen. $P(T > k) \leq 0{,}01 \Leftrightarrow P(T \leq k) \geq 0{,}99$ Aus der Tabelle entnimmt man, dass $k = 587$ die kleinste Zahl ist mit $P(T \leq 587) \geq 0{,}99$. Die Extraprämie wird nach dieser Regel gezahlt, falls mindestens 588 Personen in der Umfrage angeben, das neue Handy zu kennen. Der Fehler 1. Art beträgt dann höchstens 1%.		10	20
e)	$p = 0{,}6$; es muss hier ein Fehler 2.Art ermittelt werden. Der Tabelle entnimmt man $P\left(T \leq 587 \mid p = 0{,}6\right) = 0{,}20966$ Die Wahrscheinlichkeit, dass „Multiwerb“ die Prämie nicht erhält, obwohl 60% der 14- bis 20-Jährigen das Handy kennen, beträgt ca. 21%. Analog erhält man $P\left(T \leq 587 \mid p = 0{,}65\right) = 0{,}00002$, die Wahrscheinlichkeit, dass „Multiwerb“ die Prämie nicht erhält, ist bei diesem deutlich gesteigerten Bekanntheitsgrad von 65% nahezu 0.		10	
f)	Die Entscheidungsregel entspricht den Interessen von „Datafunk“: Die Wahrscheinlichkeit einer Auszahlung der Prämie, falls der höheren Bekanntheitsgrad gar nicht erreicht wird, ist mit 1% sehr gering. Dagegen wird die Prämie für „Multiwerb“ erst bei deutlich erhöhtem Bekanntheitsgrad (den „Multiwerb“ vermutlich kaum erreichen kann) mit hoher Wahrscheinlichkeit fällig, wie Teilaufgabe e) zeigt.		10	
	Insgesamt 100 BWE	30	50	20

_________/_________
Kurs-Nr. / Schüler-Nr.

STOCHASTIK 2

III.2 Rubbellose

Ein Wohltätigkeitsverein verkauft auf verschiedenen Festen Lose. 3 % der produzierten Lose sind Gewinnlose. Auch auf einem Straßenfest werden Lose im Auftrag des Vereins verkauft.

Es gelten die folgenden Spielregeln:

Zu kaufen sind jeweils Päckchen mit vier selbstklebenden Losen und einem Losschein zum Preis von insgesamt 5 €.
Die Lose sind auf die vier vorgedruckten Felder des Losscheines aufzukleben und anschließend „frei zu rubbeln". Dann erkennt man, wie viele Gewinnlose man hat. Ein Ablösen der Lose vom Schein ist nach dem Aufkleben nicht mehr möglich.

Nach der Anzahl der Gewinnlose auf einem Schein richtet sich die Auszahlung des Preisgeldes. In der folgenden Tabelle kann man die gerundeten Wahrscheinlichkeiten für die verschiedenen Fälle und die zugehörigen Auszahlungen ablesen. Dabei wurde eine Binomialverteilung zugrunde gelegt.

Anzahl der frei gerubbelten Gewinnlose	0	1	2	3	4
Wahrscheinlichkeit	0,885	0,110	$\frac{1}{197}$	$\frac{1}{9546}$	$\frac{1}{1.235.000}$
ausgezahltes Preisgeld in €	0	5	25	125	625

a) Bestätigen Sie die Näherungswerte der einzelnen Wahrscheinlichkeiten in der Tabelle.

b) Berechnen Sie den zu erwartenden Gewinn / Verlust beim Kauf von vier Losen.

c) Bestimmen Sie die zugehörige Standardabweichung.

Nach einiger Zeit hat eine Losverkäuferin bereits eine große Zahl ihrer Lose verkauft. Ein nachdenklicher möglicher Kunde kommt vorbei und bemerkt, dass nur noch 20 Lose im Lostopf sind.

d) Er berechnet zunächst für sich die Wahrscheinlichkeit, dass sich noch mindestens vier Gewinnlose im Lostopf befinden. Bestimmen Sie, zu welchem Ergebnis er kommt.

e) Das Ergebnis der Berechnung von d) macht den Kunden sehr skeptisch und er sucht nach einem Losverkäufer, der noch sehr viel mehr Lose in seinem Topf hat. Beurteilen Sie die Vernunft dieses Verhaltens aus stochastischer Perspektive.

f) Nehmen Sie an, Sie wüssten, dass sich in einem bestimmten Topf noch 100 Lose befinden und davon genau zwei Gewinnlose (ein solches Wissen ist in der Praxis nicht erlaubt).

   Bestimmen Sie mit diesem Wissen die zu erwartenden Einnahmen des Vereins (Verkaufserlös abzüglich ausgezahlter Gewinne) für diesen Lostopf, wenn alle Lose verkauft werden.

Erwartungshorizont

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
a)	Es handelt sich um eine Bernoulli-Kette der Länge $n=4$ mit $p=0{,}03$. $P(X=0)=0{,}97^4 \approx 0{,}885;$ $P(X=1)=\binom{4}{1}\cdot 0{,}03\cdot 0{,}97^3 \approx 0{,}110;$ $P(X=2)=\binom{4}{2}\cdot 0{,}03^2\cdot 0{,}97^2 \approx 0{,}0050809 \approx \frac{1}{197};$ $P(X=3)=\binom{4}{3}\cdot 0{,}03^3\cdot 0{,}97 \approx 0{,}00010476 \approx \frac{1}{9546};$ $P(X=4)=0{,}03^4=0{,}00000081\approx \frac{1}{1.235.00}.$ <u>Bemerkung:</u> *Natürlich kann man auch zunächst nur die Wahrscheinlichkeiten der Gewinnfälle berechnen und dann deren Summe von 1 subtrahieren, um den ersten Fall zu behandeln.*	15	5	
b)	Für den Erwartungswert gilt dann: $E(X)\approx 0{,}885\cdot 5+\frac{1}{197}(-20)+\frac{1}{9.545}\cdot(-120)+\frac{1}{1.235.000}\cdot(-620)\approx 4{,}31$ Der zu erwartende Gewinn aus der Sicht des Verkäufers ist damit 4,31 €. Alternativ kann auch der zu erwartende Gewinn aus der Sicht des Käufers berechnet werden. Dieser beträgt dann ca. –4,31 €. <u>Bemerkungen:</u> *Je nach Rundung können sich auch differierende Werte ergeben, die ggf. auch als richtig zu bewerten sind.* *Man kann auch den Erwartungswert der Auszahlungen berechnen und dann 5 € abziehen (Linearität des Erwartungswertes).*	10		
c)	Für die Varianz gilt: $V(X)=E\left((X-E(X))^2\right)=E(X^2)-\left(E(X)\right)^2$ (*) $E(X^2)\approx 0{,}885\cdot 25+\frac{1}{197}\cdot 400+\frac{1}{9546}\cdot 14400+\frac{1}{1.235.000}\cdot 384400\approx 25{,}98$ $\left(E(X)\right)^2\approx 18{,}58$ Also $V(X)\approx 7{,}40 \quad \Rightarrow s(X)=\sqrt{V(X)}\approx 2{,}72$ Die Standardabweichung des Gewinnes beträgt etwa 2,72 €.			

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	<u>*Bemerkungen:*</u> *Auch hier könnte man sich auf die Auszahlungen beschränken, Varianz und Standardabweichung ändern sich ja nicht, wenn Konstante addiert werden.* *Man kann natürlich auch – deutlich rechenaufwändiger – den ersten Term in (*) zur Bestimmung der Varianz heranziehen.*		30	
d)	Da der mögliche Käufer nichts darüber weiß, ob und wie viele Gewinnlose aus dem Topf bereits verkauft wurden und es insgesamt eine große Zahl von Losen gibt, ist für ihn die Betrachtung des Lostopfes gleichbedeutend mit der Betrachtung einer 20-0,03-binomialverteilten Zufallsvariablen, und er fragt nach $P(\text{"mindestens 4 Gewinnlose"}) =$ $P(X \geq 4) = 1 - P(X \leq 3) = 1 - \left(\binom{20}{0} 0{,}03^0 \cdot 0{,}97^{20} + \binom{20}{1} 0{,}03^1 \cdot 0{,}97^{19} + \binom{20}{2} 0{,}03^2 \cdot 0{,}97^{18} + \binom{20}{3} 0{,}03^3 \cdot 0{,}97^{17} \right)$ $\approx 0{,}0027$ Die Wahrscheinlichkeit, dass mindestens 4 Gewinnlose im Topf sind, ist kleiner als 0,3%.		20	
e)	Die geringe Wahrscheinlichkeit aus d) verleitete den möglichen Käufer zu dem Trugschluss, dass ein Topf mit sehr wenigen Losen schlecht sei. Es ist aber für die Gewinnchancen aus der Sicht des Käufers ganz egal, wie viele Lose noch in dem Topf sind, solange es noch mindestens vier sind. Dann nämlich, wenn er nichts darüber weiß, ob und wie viele Gewinnlose aus dem Topf bereits verkauft wurden und es insgesamt eine große Zahl von Losen gibt, ist für ihn die Situation gleichbedeutend mit dem Ziehen von vier Losen aus dem „großen Gesamttopf“, die Anzahl von <u>Gewinn</u>losen beim Ziehen von vier Losen ist – unabhängig von der Anzahl der Lose im Topf – stets 4-0,03-binomialverteilt (vgl. a)). <u>*Bemerkung:*</u> *Formal kann man diesen Trugschluss aufklären, indem man erkennt, dass die Anzahl X der Gewinnlose beim Ziehen von 4 Losen aus einer Urne mit n Losen folgende Verteilung hat:* $P(X=k) = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \cdot 0{,}03^j \cdot 0{,}97^{(n-j)} \cdot \frac{\binom{k}{j} \cdot \binom{n-k}{4-j}}{\binom{n}{4}}$ *Es lässt sich zeigen, dass für n > 3 diese Verteilung unabhängig von n eine 4-0,03-Binomialverteilung ist.* *Dieses Argument wird natürlich nicht erwartet, sondern die oben ausgeführte heuristische Argumentation.*			10

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III

f) *1. Lösung:*

Man unterscheidet die zwei Fälle, dass die beiden Gewinnlose

- entweder zusammen verkauft werden (1. Fall)
- oder getrennt verkauft werden (2. Fall).

Es werden in jedem Fall 25 Pakete verkauft, das führt zu Einnahmen von 125 €.
Im 1. Fall müssen 25 € ausgezahlt werden, im 2. Fall 10 €.
Der Gewinn beträgt also im 1. Fall 100 € und im zweiten Fall 115 €.

Für die beiden Fälle müssen nun die Wahrscheinlichkeiten ausgerechnet werden.

1. Fall: Es kann nur ein Paket geben, in dem die beiden Gewinnlose vorkommen. Die Wahrscheinlichkeit, dass dies beim 1. verkauften Paket passiert, beträgt $\frac{\binom{98}{2}\binom{2}{2}}{\binom{100}{4}}$. Dies kann auch beim 2., beim 3., … beim 25. Paket passieren, aber nur genau einmal – die 25 Fälle schließen sich gegenseitig aus – also gilt nach dem Summensatz:

$$P(1.\ Fall) = 25\cdot\frac{\binom{98}{2}}{\binom{100}{4}} = \frac{25\cdot 4753}{3.921.225} = \frac{1}{33}.$$

Dann gilt: $P(2.\ Fall) = \frac{32}{33}$.

$$E(G) = \frac{1}{33}\cdot 100\ € + \frac{32}{33}\cdot 115\ € \approx 114{,}55\ €$$

Damit ist der gesuchte Gewinnerwartungswert etwa 114,55 €.

2. Lösung:

Berechnet werden zunächst die zu erwartenden Einnahmen beim Verkauf der ersten vier Lose. Die Wahrscheinlichkeiten können wieder mit kombinatorischen Mitteln oder mit einem Baumdiagramm bestimmt werden:

$$P(X=0) = \frac{98}{100}\cdot\frac{97}{99}\cdot\frac{96}{98}\cdot\frac{95}{97} = 0{,}9\overline{21} \approx 0{,}9212\ ;$$

$$P(X=1) = \binom{4}{1}\cdot\frac{98}{100}\cdot\frac{97}{99}\cdot\frac{96}{98}\cdot\frac{2}{97} = 0{,}07\overline{75} \approx 0{,}0776\ ;$$

$$P(X=2) = \binom{4}{2}\cdot\frac{98}{100}\cdot\frac{97}{99}\cdot\frac{2}{98}\cdot\frac{1}{97} = 0{,}00\overline{12} \approx 0{,}0012\ .$$

	Lösungsskizze	Zuordnung, Bewertung		
		I	II	III
	Mehr als zwei Gewinne können nicht gezogen werden. Die Gewinnerwartung des ersten Paketes beträgt also: $E(G_1) \approx 0{,}9212 \cdot 5\text{ €} \pm 0{,}0776 \cdot 0\text{ €} - 0{,}0012 \cdot 20\text{ €} = 4{,}582\text{ €}$. Die gleiche Argumentation gilt natürlich auch für das zweite, dritte, … 25. zu verkaufende Lospaket. Die Gesamteinnahmen sind die Summe dieser Einnahmen. Wegen der Linearität des Erwartungswertes gilt also: $E(G) = 25 \cdot 4{,}582\text{ €} \approx 114{,}55\text{ €}$. <u>Bemerkung:</u> *Die Aufgabenteile e) und f) sind recht anspruchsvoll und gehören zweifellos in den Anforderungsbereich III, sie sind aber auch insgesamt nur mit 20 % bewertet worden, so dass eine gute Zwei auch ohne diese Teile erreichbar ist.*			10
	Insgesamt 100 BWE	25	55	20