Name: **Datum:**

Skalarprodukt - Grundwissen

Definition: Skalarprodukt zweier Vektoren

Seien $\vec{u}=\begin{pmatrix}u_1\\u_2\\u_3\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}v_1\\v_2\\v_3\end{pmatrix}$ zwei Vektoren.

Dann heißt die reelle Zahl

$$\boxed{\vec{u}*\vec{v}=:u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3\in IR}$$

das **<u>Skalarprodukt der Vektoren</u>** $\vec{u}$ **<u>und</u>** $\vec{v}$.

Beispiel: Berechne das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{u}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}$ und $\vec{v}=\begin{pmatrix}3\\-7\\5\end{pmatrix}$.

Lösung: $\vec{u}*\vec{v}=\begin{pmatrix}1\\3\\-2\end{pmatrix}*\begin{pmatrix}3\\-7\\5\end{pmatrix}=1\cdot3+3\cdot(-7)+(-2)\cdot5=3-21-10=-28$

Satz: Rechenregeln für das Skalarprodukt von Vektoren

Seien $\vec{u}$, $\vec{v}$ und $\vec{w}$ Vektoren und sei $r\in IR$ ein Skalar.

Dann gilt

1. $\vec{u}*\vec{v}=\vec{v}*\vec{u}$ (Kommutativgesetz)

2. $\vec{u}*(\vec{v}+\vec{w})=\vec{u}*\vec{v}+\vec{u}*\vec{w}$ (Distributivgesetz)

3. $r\cdot(\vec{u}*\vec{v})=(r\cdot\vec{u})*\vec{v}=\vec{u}*(r\cdot\vec{v})$ (gemischtes Assoziativgesetz)

Beweise:

1. $\vec{u}*\vec{v}=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3=v_1\cdot u_1+v_2\cdot u_2+v_3\cdot u_3=\vec{v}*\vec{u}$

2.
$$\begin{aligned}\vec{u}*(\vec{v}+\vec{w})&=u_1\cdot(v_1+w_1)+u_2\cdot(v_2+w_2)+u_3\cdot(v_3+w_3)\\&=u_1\cdot v_1+u_1\cdot w_1+u_2\cdot v_2+u_2\cdot w_2+u_3\cdot v_3+u_3\cdot w_3\\&=u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3+u_1\cdot w_1+u_2\cdot w_2+u_3\cdot w_3=\vec{u}*\vec{v}+\vec{u}*\vec{w}\end{aligned}$$

3.
$$\begin{aligned}r\cdot(\vec{u}*\vec{v})&=r\cdot(u_1\cdot v_1+u_2\cdot v_2+u_3\cdot v_3)\\&=r\cdot u_1\cdot v_1+r\cdot u_2\cdot v_2+r\cdot u_3\cdot v_3\\&=(r\cdot u_1)\cdot v_1+(r\cdot u_2)\cdot v_2+(r\cdot u_3)\cdot v_3=(r\cdot\vec{u})*\vec{v}\end{aligned}$$