Name: Datum:

Skalarprodukt - Winkel zwischen zwei Vektoren - Grundwissen

Definition: Winkel zwischen zwei Vektoren

Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei vom Nullvektor $\vec{o}$ verschiedene Vektoren.

Unter dem **Winkel** $\sphericalangle(\vec{u};\vec{v})$ **zwischen den Vektoren** $\vec{u}$ **und** $\vec{v}$ (gelesen "Winkel u v" oder "Winkel zwischen den Vektoren u und v") versteht man den nicht überstumpfen Winkel zwischen den beiden die Vektoren repräsentierenden Pfeile.

Die Weite dieses Winkels bezeichnet man meistens mit dem griechischen Buchstaben φ, (gelesen "Phi"). Die Weite des Winkels ist eine aus Maßzahl und Maßeinheit ($1°$) zusammengesetzte Größe.

Satz: Berechnung der Weite des Winkels zwischen zwei Vektoren mit dem Skalarprodukt

Seien $\vec{u}$ und $\vec{v}$ zwei vom Nullvektor $\vec{o}$ verschiedene Vektoren und sei φ die Weite des Winkels zwischen den Vektoren $\vec{u}$ und $\vec{v}$.

Dann gilt (nach dem Kosinussatz der elementaren Geometrie)

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\text{, also } \varphi = \arccos\left(\frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|}\right)}.$$

Weiter gilt

$$\boxed{\vec{u} \perp \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} * \vec{v} = 0} \text{ (Orthogonalitätskriterium)}$$

sowie

$$\boxed{\vec{u} \parallel \vec{v} \Leftrightarrow \vec{u} * \vec{v} = |\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} \text{ (Parallelitätskriterium, unhandlich)}$$

Beispiel: Berechne den Winkel zwischen den Vektoren $\vec{u} = \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$ und $\vec{v} = \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$.

Lösung:

$$\cos(\varphi) = \frac{\vec{u} * \vec{v}}{|\vec{u}| \cdot |\vec{v}|} = \frac{\begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} -1 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}}{\sqrt{1^2 + 3^2 + (-2)^2} \cdot \sqrt{(-1)^2 + 4^2 + 3^2}} = \frac{-1 + 12 - 6}{\sqrt{14} \cdot \sqrt{26}} = \frac{5}{\sqrt{364}} \approx 0{,}262$$

$$\Rightarrow \varphi \approx 74{,}8°$$