

Ableitungen mit dem GTR

Ableitungen an einer Stelle

1. Berechnung im Hauptbildschirm

Mit dem Befehl `nDeriv` (von *numeric derivation*, also numerische Ableitung) im `MATH`-Menü kann man im Hauptbildschirm einen Näherungswert für die Ableitung einer Funktion an einer Stelle berechnen.

Wir berechnen als Beispiel die Ableitung der Quadratfunktion an der Stelle 1:

`MATH` `8:nDeriv(` `X,T,θ,n` `x2` `,` `X,T,θ,n` `,` `1` `)` `ENTER`

Erwartungsgemäß ist das Ergebnis 2.

Bei dem Befehl `nDeriv` gibt man der Reihe nach, jeweils durch ein Komma getrennt, ein:

- den Funktionsterm;
- die Variable;
- die Stelle.

Berechne die Ableitung der Funktion $x \rightarrow x^3$ an der Stelle 1. Anstatt des richtigen Wertes 3 berechnet der GTR nur den Näherungswert 3,000001.

Berechnet man die Ableitung der Betragsfunktion (dies ist der Befehl `abs` im `MATH NUM`-Menü) an der Stelle 0, dann erhält man den Wert 0. Das ist Unsinn, weil die Betragsfunktion an der Stelle 0 bekanntlich nicht differenzierbar ist.

Was passiert, wenn man versucht, die Ableitung der Wurzelfunktion an der Stelle 0 zu berechnen?

Eine bereits gespeicherte Funktion muss man zur Berechnung der Ableitung nicht erneut eingeben (und sollte dies auch nicht tun, um Tippfehler zu vermeiden). Gib im `Y=`-Menü als Funktion `Y1` die Quadratfunktion ein. Wir berechnen die Ableitung dieser Funktion an der Stelle 1 und rufen dabei die Funktion wie üblich im `VARS Y-VARS`-Menü auf:

`MATH` `8:nDeriv(` `VARS` `▶` `ENTER` `ENTER` `,` `X,T,θ,n` `,` `1` `)` `ENTER`

2. Berechnung im `GRAPH`- oder `TRACE`-Bildschirm

Mit dem Befehl `dy/dx` im `Calculate`-Menü kann man im `GRAPH`- oder `TRACE`-Bildschirm einen Näherungswert für die Ableitung an einer Stelle berechnen.

Bemerkung: Den Ausdruck dy/dx liest man „ dy nach dx “; das bedeutet „Ableitung von y nach x “ und ist eine andere Schreibweise für $f'(x)$.

Wir berechnen als Beispiel die Ableitung der Quadratfunktion an der Stelle 1: Zeichne mit `GRAPH` oder `TRACE` das Schaubild der Quadratfunktion. Rufe im `Calculate`-Menü den Befehl `6:dy/dx` auf. Gib die Stelle 1 ein (und drücke die `ENTER`-Taste).

Der Cursor springt an die Stelle 1, und es erscheint das Ergebnis $dy/dx = 2$.

Anstatt die Stelle einzugeben, kann man auch mit den Pfeiltasten den Cursor an die gewünschte Stelle bringen (und die `ENTER`-Taste drücken).

Aufgabe: Zeichne das Schaubild der Funktion f und berechne die Ableitung an der Stelle x .

- $f(x) = x^3$; $x = 1$ Hinweis: Man erhält denselben Näherungswert wie oben.
- $f(x) = |x|$; $x = 0$ Hinweis: Man erhält dasselbe unsinnige Ergebnis wie oben.
- $f(x) = \sqrt{x}$; $x = 0$ Hinweis: Man erhält wie oben eine Fehlermeldung.
- $f(x) = 2^x$; $x = 1$

Hinweis: Die Ableitung dieser Funktion können wir vorläufig nur mit dem GTR bestimmen.

Ableitungsfunktionen

Mit dem Befehl `nDeriv` kann man das Schaubild einer Ableitungsfunktion zeichnen und eine Wertetabelle der Ableitungsfunktion erstellen. Man kann allerdings *nicht* den Funktionsterm der Ableitungsfunktion bestimmen.

Wir zeichnen als Beispiel die Ableitung der Quadratfunktion: Gib die Quadratfunktion als Funktion Y1 ein. Gib als Funktion Y2 Folgendes ein:

`MATH` `8:nDeriv(` `VARS` `▶` `ENTER` `ENTER` `,` `X,T,θ,n` `,` `X,T,θ,n` `)` `ENTER`

Die Funktion Y2 ist also die Ableitung der Funktion Y1 mit der Variablen x an einer beliebigen Stelle x .

Zeichne mit `GRAPH` die Schaubilder. Drücke `TRACE` und wechsle mit der Pfeiltaste `▼` zum Schaubild der Funktion Y2; als Funktionsterm wird `Y2=nDeriv(Y1,X,X)` angezeigt.

Erstelle mit `2nd` `[TABLE]` eine Wertetabelle. Es werden die Werte der Funktion Y1 und der Ableitung Y2 angezeigt.

Wir zeichnen auch die zweite Ableitung der Quadratfunktion. Dazu definieren wir die Funktion Y3 als die Ableitung der Funktion Y2. Gib als Funktion Y3 Folgendes ein:

`MATH` `8:nDeriv(` `VARS` `▶` `ENTER` `▼` `ENTER` `,` `X,T,θ,n` `,` `X,T,θ,n` `)` `ENTER`

Zeichne mit `GRAPH` die Schaubilder. Drücke `TRACE` und wechsle mit der Pfeiltaste `▼` zur Funktion Y3; als Funktionsterm wird `Y3=nDeriv(Y2,X,X)` angezeigt.

Erstelle mit `2nd` `[TABLE]` eine Wertetabelle. Zunächst werden nur die Werte der Funktion Y1 und der Ableitung Y2 angezeigt. Mit der Pfeiltaste `▶` kann man nach rechts blättern und die Werte der zweiten Ableitung Y3 anzeigen.

Die dritte Ableitung einer Funktion kann der GTR nicht zeichnen.

Standardaufgabe: Gegeben sind eine Funktion f und eine reelle Zahl m . Bestimme die Stelle(n) x , an der bzw. an denen die Tangente an das Schaubild von f die Steigung m hat.

Lösung: Löse die Gleichung $f'(x) = m$.

Erste Möglichkeit (teilweise mit GTR):

1. Bestimme ohne GTR die Ableitung f' .
2. Gib die Ableitung f' als Funktion Y1 ein.
3. Gib als Funktion Y2 die konstante Funktion m ein.
4. Bestimme mit dem Befehl `intersect` die Lösungen der Gleichung $Y1 = Y2$, d. h. bestimme den x -Wert bzw. die x -Werte des gemeinsamen Punktes bzw. der gemeinsamen Punkte von Y1 und Y2.

Zweite Möglichkeit (vollständig mit GTR):

1. Gib die Funktion f als Funktion Y1 ein.
2. Gib als Funktion Y2 die Ableitung f' ein, also $Y2 = nDeriv(Y1, X, X)$.
3. Gib als Funktion Y3 die konstante Funktion m ein.
4. Deaktiviere die Funktion Y1.
5. Bestimme mit dem Befehl `intersect` die Lösungen der Gleichung $Y2 = Y3$.

Aufgabe: Bestimme die Stelle(n) x , an der bzw. an denen die Tangente an das Schaubild der Funktion f die Steigung m hat.

- a) $f(x) = x^3$; $m = 12$ Hinweis: Diese Aufgabe kann man auch ohne GTR lösen.
- b) $f(x) = x^4 + x^2$; $m = 1$ Hinweis: Die Gleichung $f'(x) = 1$ kann man nur mit dem GTR lösen.
- c) $f(x) = 2^x$; $m = 3$

Hinweis: Die Ableitung dieser Funktion können wir vorläufig nur mit dem GTR bestimmen.