Tangenten mit dem GTR

Mit dem Befehl `Tangent` im `DRAW`-Menü kann man im `GRAPH`- oder `TRACE`-Bildschirm eine Tangente an das Schaubild einer Funktion zeichnen und näherungsweise die Tangentengleichung bestimmen. Dagegen kann man mit dem GTR keine Normalen zeichnen oder berechnen.

Erste Standardaufgabe: Bestimme die Tangente an das Schaubild einer Funktion *f* in einem Punkt $B(u \mid f(u))$.

Lösung:
Wir zeichnen und berechnen als Beispiel die Tangente an das Schaubild der Quadratfunktion an der Stelle 1: Zeichne mit `GRAPH` oder `TRACE` die Quadratfunktion. Rufe das `DRAW`-Menü durch Drücken von `2nd` `[PRGM]` auf und rufe den Befehl `5:Tangent` auf. Gib die Stelle 1 ein (und drücke die `ENTER`-Taste).
Der Cursor springt an die Stelle 1, die Tangente an dieser Stelle wird gezeichnet und links unten erscheint „$x = 1$“ und die Tangentengleichung in der (mathematisch nicht korrekten) Schreibweise „$y = 2x + -1$“.
Anstatt die Stelle einzugeben, kann man auch mit den Pfeiltasten den Cursor an die gewünschte Stelle bringen (und die `ENTER`-Taste drücken).
Rufe erneut den Befehl `Tangent` auf und zeichne die Tangente an einer weiteren Stelle.
Die Tangente(n) löscht man mit dem Befehl `ClrDraw` (von *Cl*e*a*r *Draw*, also lösche Zeichnung): Rufe im `DRAW`-Menü den Befehl `1:ClrDraw` auf.

Aufgabe: Zeichne die Tangente an das Schaubild der Funktion $x \to x^3$ an der Stelle 1.
Beachte, dass der GTR die Tangentengleichung nur näherungsweise berechnet.

Ergänzung zur ersten Standardaufgabe: Untersuche, ob die Tangente und das Schaubild von *f* weitere gemeinsame Punkte haben.

Lösung:
Der GTR speichert die angezeigte Tangentengleichung nicht als Funktion. Man muss also die Tangentengleichung abschreiben und (als Funktion `Y2`) eingeben, bevor man mit `intersect` weitere gemeinsame Punkte bestimmen kann.

Aufgabe: Bestimme die Tangente an das Schaubild der Funktion $x \to x^3$ an der Stelle 1 und bestimme den zweiten gemeinsamen Punkt der Tangente mit dem Schaubild.

Zweite Standardaufgabe: Bestimme die Tangente(n) an das Schaubild einer Funktion *f* mit einer gegebenen Steigung *m*.

Lösung:
Erste Möglichkeit (teilweise mit GTR):

1. Berechne ohne GTR die Ableitungsfunktion $f'(x)$.
2. Berechne (mit oder ohne GTR) eine Lösung der Gleichung $f'(x) = m$ und speichere sie mit `STO→` `ALPHA` `[U]` als *u*.
3. Gib die Funktion *f* als Funktion `Y1` ein und zeichne sie. Rufe den Befehl `Tangent` auf und gib `ALPHA` `[U]` ein (und drücke die `ENTER`-Taste); der GTR berechnet die Tangente an der Stelle *u*.

4. Falls die Gleichung $f'(x) = m$ weitere Lösungen hat: Lösche die vorhandene Tangente und verfahre entsprechend mit den weiteren Lösungen.

Zweite Möglichkeit (vollständig mit GTR):

1. Gib die Funktion *f* als Funktion `Y1` ein.
2. Gib als Funktion `Y2` die Ableitung f' ein, also `Y2 = nDeriv(Y1, X, X)`.
3. Gib als Funktion `Y3` die konstante Funktion *m* ein und deaktiviere die Funktion `Y1`.
4. Bestimme mit dem Befehl `intersect` eine Lösung der Gleichung `Y2 = Y3`, d. h. bestimme den *x*-Wert eines gemeinsamen Punktes von `Y2` und `Y3`. Gehe in den Hauptbildschirm und speichere den *x*-Wert mit `ALPHA` `[X]` `STO→` `ALPHA` `[U]` als *u*.
5. Aktiviere die Funktion `Y1` und deaktiviere die Funktionen `Y2` und `Y3`. Gehe in den `GRAPH`-Bildschirm und rufe den Befehl `Tangent` auf. Gib `ALPHA` `[U]` ein (und drücke die `ENTER`-Taste); der GTR berechnet die Tangente an der Stelle *u*.
6. Falls die Gleichung `Y2 = Y3` weitere Lösungen hat: Lösche die gezeichnete Tangente und bestimme die weiteren Lösungen.

Aufgabe: Bestimme die Tangenten an das Schaubild der Funktion $x \mapsto x^3$ mit der Steigung 12.

<u>Dritte Standardaufgabe:</u> Bestimme die Tangente(n) an das Schaubild einer Funktion *f* durch einen Punkt $Q(x_0 \mid y_0)$, der nicht auf dem Schaubild von *f* liegt.

<u>Lösung:</u>

Erste Möglichkeit (teilweise mit GTR):

1. Bestimme ohne GTR die Tangente t_u im „allgemeinen Berührpunkt“ $B(u \mid f(u))$.
2. Setze die Koordinaten von *Q* in die Tangentengleichung t_u ein; dies ergibt die Gleichung $t_u(x_0) = y_0$ mit der Unbekannten *u*.
3. Berechne mit dem GTR eine Lösung dieser Gleichung und speichere sie mit `STO→` `ALPHA` `[U]` als *u*.
4. Verfahre weiter wie bei 3. bei der ersten Lösungsmöglichkeit der zweiten Standardaufgabe.

Zweite Möglichkeit (vollständig mit GTR):

1. Gib die Funktion *f* als Funktion `Y1` ein.
2. Gib als Funktion `Y2` die Ableitung f' ein, also `Y2 = nDeriv(Y1, X, X)`.
3. Gib als Funktion `Y3` die Funktion $t_u(x_0) = f'(u) \cdot (x_0 - u) + f(u)$ als Funktion von *u* (im GTR: als Funktion von `X`) ein, also `Y3 = Y2` `(` `X,T,θ,n` `)` `*` `(` `x0` `-` `X,T,θ,n` `)` `+ Y1` `(` `X,T,θ,n` `)`.
4. Gib als Funktion `Y4` die konstante Funktion `y0` ein und deaktiviere die Funktionen `Y1` und `Y2`.
5. Bestimme mit dem Befehl `intersect` eine Lösung der Gleichung `Y3 = Y4`. Gehe in den Hauptbildschirm und speichere den *x*-Wert mit `ALPHA` `[X]` `STO→` `ALPHA` `[U]` als *u*.
6. Aktiviere die Funktion `Y1` und deaktiviere die Funktionen `Y3` und `Y4`. Gehe in den `GRAPH`-Bildschirm und rufe den Befehl `Tangent` auf. Gib `ALPHA` `[U]` ein (und drücke die `ENTER`-Taste); der GTR berechnet die Tangente an der Stelle *u*.
7. Falls die Gleichung `Y3 = Y4` weitere Lösungen hat: Lösche die gezeichnete Tangente und bestimme die weiteren Lösungen der Gleichung.

Aufgabe: Bestimme die Tangenten an das Schaubild der Funktion $x \mapsto x^2$, die durch den Punkt $Q(0 \mid -4)$ verlaufen.